

ТЮМЕНСКИЙ ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ НАУКИ  
ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ им. С.А. ХРИСТИАНОВИЧА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



*На правах рукописи*

Филимонова Людмила Николаевна

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС  
В ВОДЕ И ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ  
В ОБЛАСТИ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ ВОДЫ

1.3.14. Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
О.А. Симонов

Тюмень – 2024

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ОГЛАВЛЕНИЕ</b>   | <b>2</b>  |
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b>   | <b>4</b>  |
| <b>ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</b>  | <b>11</b> |
| 1.1 Конвекция в жидкости  | 11        |
| 1.2 Уравнения и безразмерные параметры, описывающие свободную конвекцию                 | 15        |
| 1.3 Эффект Марангони  | 20        |
| 1.4 Инверсия плотности воды. Особенности течений при учете максимума плотности          | 22        |
| 1.5 Конвективный перенос в пористых средах  | 28        |
| 1.6 Конвективное течение при кристаллизации воды  | 30        |
| 1.7 Заключение по главе 1   | 32        |
| <b>ГЛАВА 2. КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В СОСУДЕ С ОХЛАЖДАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ</b>              | <b>33</b> |
| 2.1 Математическая модель   | 33        |
| 2.2 Результаты численного моделирования   | 38        |
| 2.3 Сопоставление с другими исследованиями  | 45        |
| 2.4 Заключение по главе 2   | 51        |
| <b>ГЛАВА 3. КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ</b>                   | <b>52</b> |
| 3.1 Математическая модель   | 53        |
| 3.2 Безразмерный параметр $\alpha$  | 57        |
| 3.3 Численное моделирование охлаждения пористой среды при учёте инверсии плотности воды | 58        |
| 3.4 Результаты численного моделирования   | 66        |
| 3.5 Заключение по главе 3   | 70        |
| <b>ГЛАВА 4. ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВОДА-ЛЁД</b> | <b>72</b> |

|  |           |
|--|-----------|
|  | 3         |
| 4.1 Математическая модель                              | 72        |
| 4.2 Оценка характерных времён                          | 75        |
| 4.3 Численное моделирование фазового перехода вода-лёд | 77        |
| 4.4 Заключение по главе 4                              | 84        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>                                      | <b>86</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА</b>                                      | <b>89</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Вода – самое распространённое вещество на Земле. Для корректного описания физических процессов, происходящих в системах, содержащих воду, необходимо правильно учитывать конвективное течение воды. Конвективное течение в воде возникает в гравитационном поле Земли вследствие разности плотности. Плотность воды изменяется вследствие изменения температуры. Как правило, чем ниже температура, тем выше плотность вещества. Однако вода обладает следующей особенностью: при уменьшении температуры плотность воды сначала увеличивается, достигает максимума при 3,98 °С, а затем уменьшается. Эта особенность называется инверсией плотности воды. В природных условиях, наличие инверсии плотности воды способствует образованию льда на поверхности водоёмов, а на их дне находится вода с положительной температурой и максимальной плотностью, что оказывает огромное влияние на эволюцию жизни на Земле. Вода также находится в пористых средах, где важно учитывать инверсию её плотности, чтобы более точно описывать процессы добычи полезных ископаемых, промерзание и оттаивание грунтов под зданиями и сооружениями, использование термостабилизаторов в районах вечной мерзлоты и т.п. Вследствие конвекции возникают потоки, переносящие массу и тепло, а это влияет на быт и безопасность человека. Стихийные бедствия, ураганы и циклоны являются следствием свободных конвективных течений. В большинстве общепринятых оценок, расчетов, методик наличие у воды максимума плотности не учитывается. Это приводит к тому, что движение в моделируемых системах не соответствует реальным физическим процессам. Если не учитывать у воды максимум плотности, то конвективное течение происходит в одном направлении, а при учёте наличия у воды максимума плотности наблюдается инверсия направления конвективного потока. Таким образом, изучение влияния инверсии плотности воды и применение моделей, учитывающих её реальные свойства, актуальны и применимы в практике.

Исследованиями конвективного течения воды вблизи максимума её плотности занимались [7, 61, 69, 84, 85, 89 и др.]. Проводились экспериментальные наблюдения температур в сосудах с водой при охлаждении границ, при которых наблюдали плато на кривых охлаждения, которое возникало вследствие инверсии плотности воды. Многие авторы методами численного моделирования рассчитывали конвективные потоки, возникающие в экспериментальных установках. Сопоставление экспериментальных и численных результатов, показало, что немонотонное изменение температуры при охлаждении сосудов объясняется конвективными потоками. Кроме конвекции, вызванной зависимостью плотности воды от температуры, значительную роль должны играть течения, вызываемые силами на свободной поверхности (эффект Марангони), однако не встречены работы, в которых бы исследовалось взаимодействие течений, вызванных поверхностным натяжением на свободной поверхности (эффект Марангони), и свободным конвективным течением воды при инверсии её плотности, чему, в частности, посвящено исследование данной диссертационной работы.

Ряд работ как зарубежных, так и отечественных авторов [4, 10, 22, 30, 48, 49, 54, 67, 75, 85 и др.], посвящён исследованию конвекции воды в пористых средах. Изучались структуры конвективных течений при различных граничных условиях. Определялись критические пороги температуры, условия, при которых система теряет устойчивость и возникают конвективные течения в однородных и неоднородных пористых средах. Но многие исследователи не учитывают инверсию плотности воды, и не было найдено работ, в которых с помощью оценочного параметра по характерным свойствам системы можно сделать вывод о необходимости расчётов конвективного течения в пористых средах при инверсии плотности воды.

При моделировании процессов замерзания и оттаивания воды в пористых средах исследователи [21, 32, 53, 56 и др.] уделяют основное внимание увеличению объёма при промерзании (пучение) и уменьшению объёма при

протаивании (усадка). Однако, как правило, не учитываются возникающие при этом конвективные течения, а также нет детального исследования влияния конвективных течений на форму границы фазового перехода в пористых средах, не изучено влияние инверсии плотности на степень промерзания пористой среды.

В связи вышеизложенным, исследования влияния инверсии плотности воды на конвективные течения в воде и водонасыщенных пористых средах являются актуальными и важными для практического применения.

**Цель работы.** Исследовать влияние инверсии плотности воды на структуру и свойства свободных конвективных течений в воде и в водонасыщенных пористых средах, в том числе с учётом фазового перехода вода-лёд.

Для достижения цели работы были поставлены и решены следующие основные задачи:

- Проведено исследование влияния поверхностного натяжения на тепломассоперенос в цилиндрическом сосуде, в центре которого вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент.
- Изучено влияние конвективного теплопереноса на процесс охлаждения насыщенной водой пористой среды при учете явления инверсии плотности воды для различных значений проницаемости пористой среды.
- Рассмотрено влияние конвективного течения воды в пористой среде на структуру фронта кристаллизации и степень промерзания пористой среды.

### **Научная новизна**

- Представлена физико-математическая модель конвективного течения воды в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом при немонотонной зависимости плотности воды от температуры, которая включает новые граничные условия на свободной поверхности (эффект Марангони), а

также зависимости динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды от температуры.

- С помощью этой модели детально изучена структура свободных конвективных течений, впервые объяснено взаимное влияние и роли инверсии плотности воды и поверхностного натяжения на тепломассоперенос.

- Решена многопараметрическая задача конвективного течения воды в высокопроницаемой пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей зависимость динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды, а также плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры.

- Выполнен анализ влияния проницаемости пористой среды на процессы конвективного тепломассопереноса. Предложен оценочный безразмерный параметр, позволяющий по характеристикам моделируемой системы делать вывод о необходимости учёта инверсии плотности воды в теплофизических задачах. Определены значения этого безразмерного параметра, при которых возможны достоверные расчёты без учета свободной конвекции.

- Решена многопараметрическая задача кристаллизации воды в пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей конвективные течения, зависимость теплофизических параметров воды и пористой среды от температуры.

- Изучено влияние конвективного течения на форму границы области фазового перехода в пористой среде, исследовано влияние инверсии плотности на степень промерзания пористой среды.

### **Практическая значимость**

Полученные результаты важны для корректного физического описания структуры конвективных течений в воде и водонасыщенных пористых средах. Они могут быть использованы при проектировании, строительстве и

эксплуатации инженерных сооружений (зданий, скважин, трубопроводов, дорог и пр.). В ходе исследования определён характерный параметр, который может быть использован при выборе методики решения задач тепломассопереноса в водонасыщенных пористых средах вблизи нулевых температур.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается использованием известных законов механики многофазных сред и термодинамики; использованием широко апробированных численных методов, которые интегрированы в открытую интегрируемую платформу для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM, позволяющую решать сложные многопараметрические задачи; многочисленным тестированием программ при различных исходных данных; сопоставлением с экспериментами и расчетами других авторов.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- Физико-математическая модель конвективного течения воды в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом при немонотонной зависимости плотности воды от температуры, которая учитывает новые граничные условия на свободной поверхности (эффект Марангони), а также зависимости динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды от температуры. Результаты верификации и валидации применяемой модели по данным физического эксперимента и известных численных расчетов, показывающие достаточно высокую точность модели.
- Результаты численного моделирования конвективного течения воды в высокопроницаемой пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной многопараметрической физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей зависимость динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды, а также плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры. Введённый оценочный безразмерный параметр, позволяющий по характеристикам моделируемой системы делать вывод о необходимости учёта



инверсии плотности воды в задачах тепломассопереноса в пористой среде, в том числе с учётом фазовых переходов.

- Результаты численного моделирования процесса кристаллизации воды в пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом, на основе полной многопараметрической физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей конвективные течения, зависимость теплофизических параметров воды и пористой среды от температуры. Объяснение значения и роли конвективных потоков при кристаллизации в водонасыщенных пористых средах и их влияние на степень промерзания пористой среды и на форму фронта области кристаллизации.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего 94 наименования. Общий объем диссертации составляет 98 страниц, диссертация содержит 32 рисунка.

**Личный вклад.** Проведение расчётов и анализ результатов, сопоставление полученных данных с результатами других авторов. В работах, выполненных в соавторстве, автор участвовал во всех этапах исследования от постановки задачи и выбора метода её решения до получения и анализа результатов. Представление изложенных в диссертации и выносимых на защиту результатов, полученных в совместных исследованиях, согласовано с соавторами.

### **Апробация работы**

Результаты исследований, приведённые в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

- III международная научно-практическая конференция «физика конденсированного состояния и ее приложения», Стерлитамак, 2020.
- Всероссийская конференция с международным участием «Устойчивость природных и технических систем в криолитозоне», посвященная 60-летию образования Института мерзлотоведения им. П.И. Мельникова СО РАН, Якутск, 2020.

- XV Международная конференция «Забабахинские научные чтения», Снежинск, 2021.
- Международная конференция «Современные исследования трансформации криосферы и вопросы геотехнической безопасности сооружений в Арктике 2021», Салехард, 2021.
- Всероссийская конференция молодых ученых-механиков YSM-2021, посвященная 60-летию первого полета человека в космос, Сочи, 2021.
- XXI Международная конференция по методам аэрофизических исследований Россия, Новосибирск, 2022.
- XVI Международная конференция «Забабахинские научные чтения», Снежинск, 2023.

Результаты работы неоднократно докладывались автором на семинарах Тюменского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 11 научных работ (общий объем 4,4 п.л., авторский вклад 2,2 п.л.), из них 4 в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, в том числе 1 публикация в издании, входящем в международные базы данных (Web of Science и Scopus), 7 публикаций в материалах и тезисах конференций.

**Благодарности.** Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук Симонову О.А. за оказанную поддержку, наставления и консультации на протяжении всего времени работы над темой диссертации.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1 Конвекция в жидкости

**Конвекция** (от лат. *convectiō* — «перенесение») — вид теплообмена (теплопередачи), при котором внутренняя энергия механически переносится вместе с веществом. Молекулярный перенос теплоты всегда присутствует при вызванных законами механике перемешивании, но от условий, в которые определяют интенсивность механического перемешивания и условия молекулярного теплопереноса зависит энергетическое состояние исследуемой системы.

Обычно выделяют два вида конвекции: свободная (естественная) и вынужденная. Вынужденная конвекция возникает при действии внешних сил, приложенных к жидкости, например, под действием ветра, лопаток насоса или вентилятора [59]. Свободная (или естественная) конвекция – это движение жидкости или газа вследствие разности их плотностей в пространстве в поле действия силы тяжести. Разность плотности возникает в следствие пространственного распределения примесей, различной концентрации растворенного вещества и/или температуры. Интенсивность свободной конвекции зависит от пространственного распределения плотности и от объема пространства, где происходит движение от ее вязкости и теплопроводности.

Явление свободной конвекции в жидкости можно объяснить законом Архимеда и явлением теплового расширения тел. При повышении температуры объем жидкости возрастает, а плотность уменьшается. Под действием архимедовых сил менее плотная жидкость поднимается вверх, а более плотная жидкость опускается вниз. Обычно, плотность жидкостей монотонно уменьшается с увеличением температуры, поэтому общепринято, что холодная жидкость – более плотная и она опускается вниз. Но для воды, самого распространённого вещества на Земле, это не так. Особенности зависимости плотности воды от температуры, а также явления, к которым это приводит будут

обсуждены в дальнейшем, именно они являются целью исследования автора этой диссертационной работы.

Для обзора проблем и задач, которые исследователи решают при изучении конвективного теплопереноса для иллюстрации явлений конвективного теплопереноса, забудем пока о особенностях воды.

Обычно если жидкость нагревать сверху, то менее плотная теплая жидкость останется сверху, и конвекция не возникнет. Теплоперенос определяется молекулярным теплопереносом - температуропроводностью жидкости.

Если слой жидкости нагревать снизу, то рано или поздно, теплая менее плотная жидкость начнет всплывать, возникает механическое движение, переносящее массу и тепло. Устанавливается круговорот жидкости, сопровождающийся переносом энергии от нагретых участков к более холодным.

Каждый человек ежедневно сталкивается с естественной конвекцией. Примером естественной конвекции могут служить многие атмосферные явления и повседневная практика, например, образование облаков, дождь, град, открытое окно и работа кондиционера.

В связи с тем, что свободная конвекция тесно связана с деятельностью человека и играет большую роль в теплообменных процессах, непосредственно связанных с человеческой практикой, это явление привлекает внимание многих исследователей. Исследованию естественной конвекции посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ [4, 7, 10, 13, 46, 50, 54, 60]. Основным предметом исследований являются методы описания конвективных течений, условия возникновения конвекции, вихревые структуры, возникающие в таких потоках, их устойчивость и возникновение турбулентности. Исследуется перенос массы и тепла вследствие конвективных течений как на микроуровнях, так и глобальных масштабах. Повсеместность распространения конвективных течений, а также их существенная роль в

теплопереносе определяют интерес исследователей и практически ни одна из инженерных задач не может быть решена без учета этого явления.

Наиболее часто к естественной конвекции приводит зависимость плотности жидкости или газа от температуры. Плотность всех веществ зависит от температуры. Обычно, при нагревании расстояние между молекулами вещества увеличивается и тела расширяются. Изменение плотности в зависимости от температуры приводит к тому, что в природных условиях возникают ситуации, когда более лёгкое прогретое вещество (жидкость или газ) находится под более тяжёлым (например, солнечная радиация, атмосфера). Это приводит к возникновению неустойчивого состояния, в результате которого могут возникнуть потоки вещества. Тёплый поток, поднимаясь, вытесняет более холодный поток вниз, возникает движение веществ.

Впервые, это движение в слое жидкости зафиксировал и детально описал Бенар [14]. Он наливал спермацетовое масло тонким слоем в широкий сосуд, подогревал его снизу, наблюдая за свободной поверхностью масла. В результате эксперимента Бенар наблюдал упорядоченные геометрические структуры, возникающие на свободной поверхности, по виду напоминавшей пчелиные соты. Эти структуры возникли из-за самоупорядочивания возникших конвективных потоков. Позднее, конвекция, возникающая в тонком горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу и охлаждаемом сверху, стала называться конвекцией Рэлея — Бенара.

Бенар исследовал устойчивость жидкости [14] к возникновению упорядоченных конвективных потоков. Для этого он вводил пространственные тепловые возмущения в подогреваемую с низу поверхность. Бенар и его последователи установили, что характер переноса тепла между верхним и нижним слоями жидкости зависит от интенсивности нагрева, который определяет разность температур. При слабом нагреве сама жидкость неподвижна, переносится лишь тепловая энергия за счет молекулярной теплопроводности. По мере повышения интенсивности нагрева большую роль

начинает играть конвекция: нагретая жидкость расширяется, становится более легкой и стремится всплыть вверх. Когда разность температур достигает некоторого критического значения, жидкость начинает всплывать тонкими пространственными струями, вытесняя вниз холодную жидкость. Интенсивность перемешивания увеличивается, теплоперенос значительно возрастает. Движение становится пространственно упорядоченным, весь объем жидкости разделяется на одинаковые ячейки, в каждой из которых происходит незатухающее конвекционное движение частиц жидкости по замкнутым траекториям. В условиях опыта Бенара конвекционные ячейки имели форму почти правильных шестиугольников, очень похожую на пчелиные соты. В центре каждой ячейки нагретая жидкость поднималась снизу вверх, а вдоль границ ячеек – опускалась сверху вниз [14].

В 1916 году английский физик лорд Рэлей впервые теоретически описал явление конвекции в условиях эксперимента Бенара. Он показал, что ячейки Бенара образуются, когда разность температур между слоями жидкости достигает некоторого критического значения (зависящего от свойств жидкости и толщины ее слоя). Рэлей из уравнений гидродинамики, известных с начала XIX в [52] предложил безразмерный параметр:

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu \chi}, \quad (1.1.1)$$

где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\Delta T$  — разность температур между стенками и жидкостью;  $L$  — характеристический размер области жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\chi$  — температуропроводность жидкости.

Этот параметр в последствии был назван числом **Рэля** ( $Ra$ ) — безразмерное число, определяющее поведение вязкой несжимаемой жидкости под воздействием градиента температуры.

Джеффрис [76] показал, что критическое число Рэля в начале конвекции Рэля-Бенара в бесконечном слое жидкости конечное число. Позже, начало

конвекции Рэля-Бенара было исследовано в экспериментах с помощью линейного анализа устойчивости [65,71]. Линейный анализ устойчивости показывает какие пространственные малые возмущения температуры (плотности) приводят к регулярному, ламинарному течению. Проблема восприимчивости механических систем с пространственным изменением температуры к малым пространственным возмущениям до настоящего времени глубоко не исследована. Множество работ по изучению свободной конвекции Рэля-Бенара посвящено исследованию режимов течения и теплопереноса в различных условиях, но в настоящий момент достоверно установлено лишь то, что для возникновения конвекции Рэля – Бенара в жидкости требуется подогрев снизу (или охлаждение сверху), причем нагрев (или охлаждение) в разных пространственных точках должен быть неравномерным.

Конвекция Рэля-Бенара классический пример конвективного теплопереноса, иллюстрирующий неустойчивость механических систем к малым возмущениям, способность движения, вызванного силами плавучести к самоорганизации, устойчивость возникших потоков и их дальнейшую эволюцию при нарастании градиента температур. Для описания конвективного движения классически используется несколько теоретических подходов, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

## **1.2 Уравнения и безразмерные параметры, описывающие свободную конвекцию**

Свободное конвективное ламинарное течение не может вызвать скачков плотности, возникновению разрывов скорости. Конечно, это предположение не применимо для течений, вызванных большой энергией и большими градиентами температуры. Такие явления как смерчи, ураганы не могут быть описаны в излагаемом ниже подходе. Тогда, когда скорости конвективного движения и разности плотности сплошной среды не велики, жидкость можно считать несжимаемой, и для описания свободной конвекции применимо использование

уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости. В векторной форме это уравнение для сплошной среды в поле тяжести запишется в виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (1.2.1)$$

где  $t$  – время (с);  $\vec{u}$  – вектор скорости движения сплошной среды (м/с);  $p$  – давление (Па);  $T$  – температура (К);  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения (м/с<sup>2</sup>);  $\rho$  – плотность сплошной среды (кг/м<sup>3</sup>);  $\mu$  – динамическая вязкость сплошной среды (Па·с).

Уравнение неразрывности:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.2.2)$$

Уравнение баланса энергии:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0, \quad (1.2.3)$$

где  $c$  – теплоёмкость сплошной среды (Дж/(кг·К));  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности сплошной среды (Вт/(м·К)). Приведенная выше система уравнений описывает как ламинарное, так и турбулентное движение жидкости в поле тяжести. Но её аналитические и численные решения затруднены, так как надо проводить их валидацию с экспериментальными данными, что приводит к значительным трудностям расчета турбулентных течений. Поэтому, для теоретического анализа свободных конвективных течений применяются различные физические модели.

Наиболее распространённая модель для описания конвекции в жидкостях – уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска. Модель включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности и уравнение неразрывности. Основная идея приближения – учёт зависимости плотности от температуры при условии её малого изменения. В этом случае рядом членов у уравнения Навье-Стокса можно пренебречь. В этом приближении в системе уравнений конвекции данная зависимость учитывается только в слагаемом, определяющем массовую силу:



$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \rho(T) \vec{g} + \mu \Delta \vec{u} \quad (1.2.4)$$

где  $\rho_0$  – плотность сплошной среды при некоторой равновесной температуре  $T_0$ .

В диссертационной работе исследовались процессы тепломассопереноса при охлаждении воды и водонасыщенных пористых сред в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом при инверсии плотности воды. В условиях исследования поведение конвективных течений определяют архимедовы силы, которые в свою очередь зависят от закона изменения плотности воды от температуры, вязкие взаимодействия, силы инерции, а также теплоемкость и теплопроводность воды. Кроме этого, при существовании свободной поверхности, существенную роль играют силы поверхностного натяжения. Такое разнообразие сил и явлений, влияющих на поведение системы, влечет за собой появление достаточно большого числа безразмерных параметров, позволяющих сравнить между собою степень влияния того или иного фактора.

При анализе свободных конвективных течений [42] делается вывод о зависимости основных характеристик течения (скорость и толщина пограничного слоя) от числа **Грасгофа**  $Gr = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2}$ , где  $L$  – характерный размер. Критерий подобия, определяющий процесс подобия теплообмена при конвекции в поле тяжести, является мерой соотношения архимедовой выталкивающей силы, вызванной неравномерным распределением плотности жидкости (газа) в неоднородном поле температур, и сил вязкости.

Из этого же анализа следует, что другим значимым безразмерным критерием подобия является отношения кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности, который получил название – число **Прандтля**  $Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{\chi}$  – характеризует подобие полей скоростей и температур. Число Прандтля определяется только термодинамическим состоянием движущейся среды и показывает соотношение переноса момента движения за счёт сил вязкости и термодинамического переноса тепла. Чем больше число Прандтля, тем менее значим конвективный перенос энергии в системе. При  $Pr=1$

уравнения движения и теплопроводности становятся тождественными относительно своих переменных, что означает подобие распределений скоростей и температур.

Анализируя систему уравнений, описывающих конвективное движение, авторы работы [60], используя методы подобия и размерности [44], показали, что при условии геометрического подобия, два конвективных течения подобны если у них совпадают числа Рэлея и Прандтля. Числа Грасгофа и Прандтля связаны числом **Рэлея** (1.1.1):  $Ra = GrPr$  – критерий подобия, определяющий поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Если число Рэлея больше некоторого критического значения, равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают конвективные потоки. Критическое значение числа Рэлея является точкой бифуркации для динамики жидкости.

Кроме числа Прандтля, Грасгофа и Рэлея в задачах конвективных течений существует еще ряд безразмерных критериев подобия, в первую очередь это число **Рейнольдса**  $Re = \frac{UL}{\nu}$  – мера отношения сил инерции, действующих в потоке, к силам вязкости, где  $U$  – характерная скорость течения жидкости. Плотность в числителе выражения характеризует инерцию частиц, отклонившихся от движения по прямой, а вязкость в знаменателе показывает склонность жидкости препятствовать такому отклонению. Также число Рейнольдса можно рассматривать как отношение кинетической энергии жидкости к потерям энергии на характерной длине (ввиду внутреннего трения). Если у потока число Рейнольдса достаточно большое (выше критической величины), то жидкость можно рассматривать как идеальную. В таком случае вязкостью можно пренебречь. Для каждого вида течения существует критическое число Рейнольдса, которое, как принято считать, определяет переход от ламинарного течения к турбулентному.

Ещё один важный безразмерный критерий подобия для описания конвективных течений, является число **Пекле**  $Pe = \frac{UL}{\chi}$  – критерий подобия, характеризующий отношение конвективных и кондуктивных составляющих

теплообмена. При малых значениях преобладает молекулярная теплопроводность, а при больших — конвективный перенос теплоты.

Следует отметить, что числа Пекле и Рейнольдса связаны числом **Прандтля**  $Pr = \frac{Pe}{Re}$ .

Число Грасгофа включает в себя безразмерную часть, которая так же служит критерием подобия и называется числом **Галилея**  $Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{g\rho^2L^3}{\mu^2}$  — показывает соотношение между силами гравитации и силами вязкости в среде ( $\rho$  — плотность жидкости).

Критерием подобия, показывающим отношение сил инерции к гравитационным силам, служит число **Фруда**  $Fr = \frac{U^2}{Lg}$ .

При анализе конвективного движения вызванного силами поверхностного натяжения используют безразмерное число **Марангони**  $Ma = \frac{d\sigma}{dT} \frac{1}{\chi\eta} L\Delta T$ , которое служит критерием подобия и является аналогом числа Рэлея ( $\sigma$  — поверхностное натяжение).

При изучении гидродинамических, тепловых и диффузионных процессов, также используются следующие критерии (чисел) подобия:

– **Число Фурье**  $Fo = \frac{\chi t}{L^2}$  — один из критериев подобия нестационарных тепловых процессов. Характеризует соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела), который зависит от размеров тела и коэффициента его теплопроводности.

Критерий Фурье вместе с критерием Био являются определяющими при решении задач нестационарной теплопроводности, описываемых уравнением теплопроводности.

– **Число Нуссельта**  $Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$ ; — один из основных критериев подобия тепловых процессов, характеризующий соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции и интенсивностью теплообмена за счёт

теплопроводности (в условиях неподвижной среды), где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Число Нуссельта всегда больше или равно 1. То есть тепловой поток за счёт конвекции всегда превышает по своей величине тепловой поток за счёт теплопроводности.

Обычно для ламинарных течений число Нуссельта находится в диапазоне от 1 до 20. Большие числа Нуссельта  $Nu > 100$  свидетельствуют о сильном конвективном тепловом потоке, что является характеристикой турбулентных течений.

– Число **Стэнтона**  $St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{\alpha}{c_p U}$  – критерий подобия, характеризующий отношение эффективной теплоотдачи с поверхности к конвективному теплопереносу. Число Стэнтона является безразмерной формой коэффициента теплоотдачи.

Обычно, при изучении конвективных течений, вызванных естественной конвекцией, используется линейная зависимость плотности воды от температуры, тогда применяют числа Нуссельта, Грасгофа, Прандтля и Рэлея. Для описания условий возникновения конвективного движения многие исследователи предлагают вместо числа Рэлея применять другие безразмерные параметры. В частности, в результате экспериментальных исследований в работе [59], показано, что при  $Gr \cdot Pr < 10^3$  конвекция не возникает.

### 1.3 Эффект Марангони

Двухмерные и трехмерные нестационарные течения в настоящее время активно исследуются. Проводится численное моделирование потоков в сосудах различной конфигурации, описываются возникающие трехмерные структуры, изучаются условия их возникновения. Но в публикуемых работах обычно не учитывается наличие свободной поверхности и влияние на конвективный перенос поверхностного натяжения на ней. Величина поверхностного натяжения

зависит от температуры, следовательно, при наличии градиента температур на свободной поверхности вклад поверхностных явлений в формирование конвективного теплопереноса может быть существенным.

Влияние поверхностного натяжения на течения жидкости впервые обнаружил в 1865 году Марангони [80]. Наблюдая на стенках бокала с вином тонкую плёнку жидкости со скатывающимися вниз каплями, предположил, что она может быть обусловлена наличием градиента поверхностного натяжения, который может возникать из-за разницы температуры или концентрации. С тех пор данное явление носит название эффект Марангони. При наличии градиента температуры на свободной поверхности жидкости возникает градиент поверхностного натяжения, приводящий к движению жидкости вдоль поверхности. В большинстве случаев конвекция жидкости под действием силы тяжести намного больше градиента поверхностного натяжения, поэтому влиянием эффекта Марангони можно пренебречь, но при небольших градиентах температуры вблизи максимума плотности воды роль поверхностного натяжения может быть существенна.

В работе [43] теоретически исследованы условия возникновения конвективного потока в слое жидкости, подогреваемом снизу (неустойчивость Рэлея) при учете эффекта Марангони. Показано, что конвективное движение, обусловленное только термокапиллярными явлениями, может происходить в достаточно тонком слое жидкости. В большинстве случаев конвективный перенос начинается под воздействием сил плавучести. В этой работе показано существование связи критических чисел Рэлея и Марангони, но не раскрыта роль поверхностного натяжения в формировании конвективного потока. В работе [87] численно исследовалось влияние эффекта Марангони на теплоперенос и на структуру конвективного течения при охлаждении внешней стенки сосуда с водой. Показана существенная роль поверхностного натяжения на границе раздела фаз в формировании конвективного потока и его влияния на скорость охлаждения воды в сосуде.

В практике, кроме задач охлаждения некоторого сосуда с водой, распространены и актуальны задачи конвективного переноса около цилиндрической вертикально расположенной трубы, помещенной в водную среду. К примеру: цилиндрическая свая (термостабилизатор) в озере или устье скважины на шельфе, а также все газо- трубопроводы на обводненных участках и т. д. В таких задачах всегда существует свободная поверхность, на которой есть градиент температуры, а также ненулевое поверхностное натяжение.

#### **1.4 Инверсия плотности воды. Особенности течений при учете максимума плотности**

Вода, в отличие от всех остальных жидкостей, имеет удивительное свойство - её плотность изменяется немонотонно в зависимости от температуры. Наличие максимума плотности и уменьшение плотности при приближении к температуре кристаллизации ( $0^{\circ}\text{C}$ ) называется инверсией плотности. Это явление впервые было обнаружено Берналом и Фаулером в 1933 году [2]. Они объяснили инверсию плотности особенностью строения молекулы воды, а именно её «угловой» формой и характерным распределением зарядов в ней. При высоких температурах зависимость плотности от температуры у воды такая же как у всех жидкостей - с уменьшением температуры уменьшается тепловое движение молекул, они располагаются теснее друг к другу, вследствие чего плотность возрастает.

При температурах близких к температуре кристаллизации плотность воды уменьшается. Это происходит из-за того, что между молекулами воды начинают возникать водородные связи (взаимодействие атома водорода с атомом кислорода соседней молекулы), за счет которых молекулы воды образуют ажурную кристаллическую решетку льда (рис.1.4.1), и он становится легче воды на 9%.

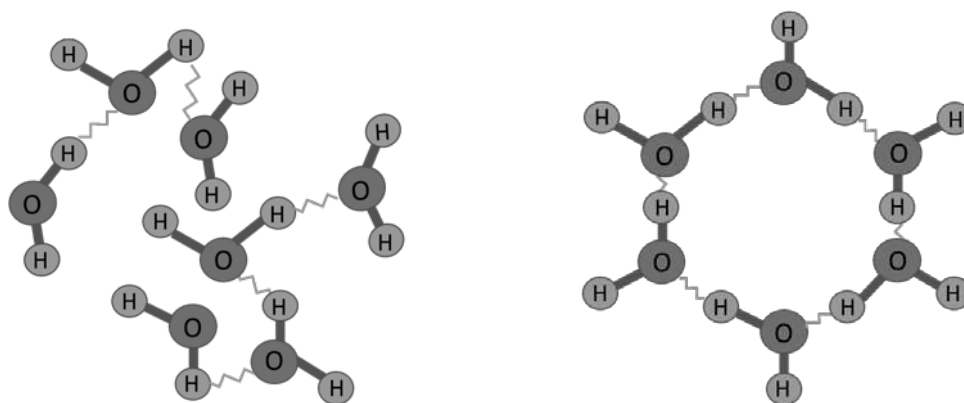


Рисунок 1.4.1 Водородные связи между молекулами воды в жидкости (слева) и кристаллической решётке льда (справа)

Максимальная плотность воды  $999,972 \text{ кг/м}^3$  при атмосферном давлении наблюдается при температуре  $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ . При  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  плотность воды меньше её максимальной плотности на  $0,0132\%$ , с повышением температуры до  $8 \text{ }^\circ\text{C}$  плотность уменьшается примерно на такую же величину (рис. 1.4.2) [88]. Благодаря тому, что холодная вода легче, лёд формируется именно на поверхности водоёмов, что чрезвычайно важно для биосферы Земли.

Зависимость плотности воды от температуры определена экспериментально и для задач механики может быть представлена зависимостью из работы [84]:

$$\rho_w(T) = 9,3456 \cdot 10^{-2} + 8,660272T - 2,3437 \cdot 10^{-2}T^2 + 1,878703 \cdot 10^{-5}T^3$$

где  $\rho_w(T)$  – плотность воды ( $\text{кг/м}^3$ ).

На рисунке 1.4.2 изображена, используемая в численных расчётах, полиномиальная зависимость плотности воды от температуры согласно вышеприведённой формуле. Как видно из графика данная зависимость учитывает максимум плотности воды.

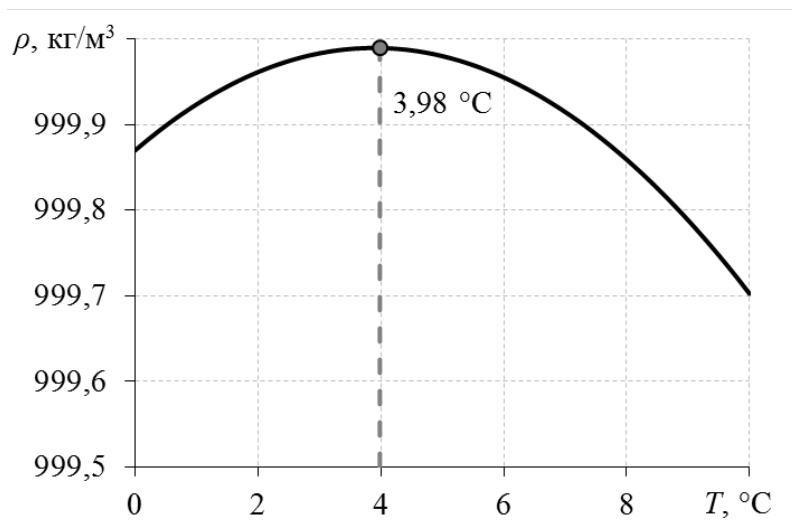


Рисунок 1.4.2. Зависимость плотности воды от температуры. Максимум плотности воды достигается при температуре 276,98 К (3,98°С)

Инверсия плотности воды делает особенным конвективное течение – при определенных условиях холодная вода начинает всплывать, изменяя направление конвективного переноса. Детально такие конвективные течения исследованы в работе [1]. Авторы измеряли температуру в центре медного тонкостенного вертикального цилиндра, заполненного водой. Цилиндр помещался в охлаждающую рубашку, которая соединялась с двумя термостатами. Температура одной термостаты  $-5^{\circ}\text{C}$ , другой  $+16^{\circ}\text{C}$ . Цилиндр охлаждали-нагревали циклически. В качестве исследуемой жидкости применялась тяжелая вода ( $\text{D}_2\text{O}$ ) различной концентрации. Жидкость не имела свободной поверхности, так как цилиндр сверху закрыт резьбовой крышкой, исключающей наличие воздуха [88]. В ходе работы авторами зафиксирована немонотонное изменение температуры в центре цилиндра, а именно, при его охлаждении температура оставалась постоянной длительное время, образуя характерное плато (рис. 1.4.3). Авторы объясняют такое поведение температуры изменением направления конвекции вследствие инверсии плотности воды и делают вывод, что по характеристикам этих кривых можно определять концентрацию тяжёлой воды.



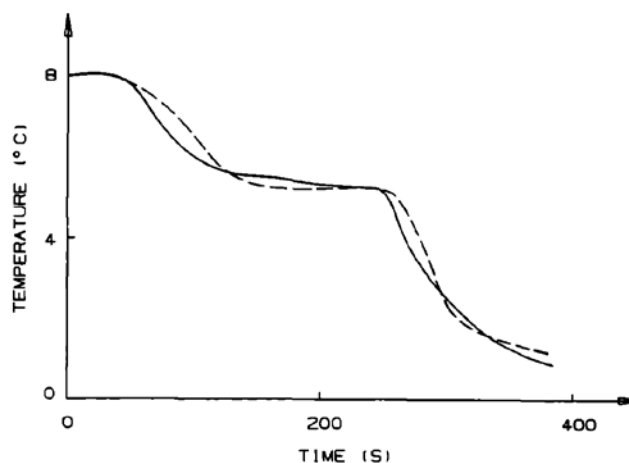


Рисунок 1.4.3. Зависимость температуры в центре цилиндрического сосуда от времени при охлаждении его стенок. График иллюстрирует немонотонное изменение температуры и явление «гистерезиса»: *сплошная* линия – охлаждение, *пунктирная* линия – нагревание стенок цилиндрического сосуда. Данные работы [1]

Изучением возникновения конвекции вблизи точки инверсии плотности в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, занимались авторы [82, 90, 33]. В предложенной численной модели показано, что устойчивая конвекция возникает при числах Рэлея ниже критического значения.

Для воды, при температуре близкой к инверсии плотности сложно рассчитать критическое значение числа Рэлея, так как коэффициент расширения зависит от температуры. Поэтому не обосновано применение классического понятия числа Рэлея как критерия устойчивости возникновения конвекции. В работе [82] приведён обзор работ по устойчивости равновесия слоя жидкости вблизи точки инверсии плотности воды подтверждающий эти выводы.

Теоретическое и экспериментальное исследование влияния инверсии плотности на возникновение конвекции в горизонтальном слое воды, нагреваемом снизу и охлаждаемом сверху, проведено в работе [74]. Показано, что инверсия плотности воды влияет на стабилизацию слоя жидкости. В [39] приведено численное исследование влияния положения точки инверсии плотности внутри слоя на критическое значение числа Рэлея и амплитуды

возникающих конвективных течений. В работе [81] численно исследовано возникновение конвекции в горизонтальном слое воды вблизи точки инверсии плотности, используется уравнение состояния, основанное на измерениях изменения плотности от температуры для чистой и соленой воды. Результаты сравниваются с ранее полученными результатами при других зависимостях плотности воды от температуры. Критическое число Рэлея примерно на 10% ниже, чем с использованием монотонной зависимости плотности воды от температуры и довольно близко к значениям, полученным с использованием полинома пятой степени для зависимости плотности воды от температуры, отражающим максимум плотности воды.

Позднее авторы [89] проводя эксперименты по изучению периодических циклов охлаждения-нагрева обнаружили гистерезис кривых охлаждения-нагрева. Измеряя температуру в центре охлаждаемого/нагреваемого по бокам цилиндра, датчик фиксировал характерное для воды «плато» (рис. 1.4.2). Было установлено, что характеристики "плато" (температура стабилизации и длительность) зависят от направления изменения температуры. Кроме этого, в этой работе авторы измеряли температуру в некоторых точках по оси цилиндра и предложили теоретическую модель, описывающую такое течение. В работе [69], авторы, повторяя эксперименты [1], измерили профили скорости конвективного течения и провели прямое численное моделирование, что позволило наглядно объяснить причины возникновения "плато" на кривой охлаждения. В цилиндрическом сосуде, наполненном теплой жидкостью и помещенном в охлажденный термостат, сначала устанавливается режим течения, в котором жидкость, отдавая тепло стенкам сосуда, опускается вдоль них и накапливается на дне сосуда, затем, когда её температура становится ниже  $4^{\circ}\text{C}$ , начинает подниматься вдоль стен сосуда в виде вихря, оттесняя от стенок нисходящий поток [46]. В центре сосуда в это время жидкость практически не движется, температура остается постоянной. Затем поднимающийся вверх холодный поток достигает поверхности, и холодная жидкость заполняет сосуд

сверху. В работе [70] на принципиально другой экспериментальной установке исследована структура конвективного потока вблизи максимума плотности водных растворов различных солей. Эксперименты сопровождались численным моделированием. Исследуемая жидкость помещалась в прямоугольную емкость, на двух противоположных вертикальных стенках которой двумя различными термостатами фиксировалась температура с заданной разницей  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Свободная поверхность жидкость-газ исключалась [46]. В емкости возникало конвективное течение – жидкость вдоль «холодной» стенки опускалась, и поднималась вдоль «теплой» стенки. Когда на одном из термостатов температура становилась меньше, и когда  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  в сосуде возникал еще один стационарный вихревой поток – жидкость поднималась вдоль двух стенок и опускалась в центральной области сосуда. Авторы [70] изучили структуру такого потока в зависимости от состава экспериментальной жидкости для широкого круга добавок (различные спирты, соли). Они сделали вывод, что об особенностях межмолекулярного взаимодействия водных растворов можно судить по структуре конвективного вихря.

Несмотря на достаточное количество работ, описывающих конвективное течение с учетом максимума плотности воды, немонотонное изменение температуры в охлаждаемых (нагреваемых) сосудах с водой настолько удивительно, что авторы [8], наблюдая замедление темпа охлаждения (нагрева) воды, связали это явление с неравновесными фазовыми переходами, однако, после исследований других авторов [40] в работе [7] изменили свою точку зрения, указав, что наблюдаемое ими явление определяется конвекцией.

Двухмерные и трехмерные нестационарные течения при наличии инверсии плотности в настоящее время активно исследуются. Проводится численное моделирование потоков в сосудах различной конфигурации, описываются возникающие трехмерные структуры, изучаются условия их возникновения. В числе последних интересных исследований следует отметить работы Зубкова и

др. по изучению естественной конвекции воды, при температуре близкой к температуре инверсии плотности [24, 94]. В этих работах исследовано поведение численных решений при изменениях чисел Грасгофа. Получило несколько устойчивых моделей течения конвекции Рэлея-Бенара в холодной воде вблизи максимума ее плотности при  $0 < Gr < 17000$ .

### **1.5 Конвективный перенос в пористых средах**

С естественной конвекцией в насыщенных жидкостью пористых средах инженеры и ученые, а также обычные, не имеющие отношения к научному познанию люди, сталкиваются повседневно в быту, различных областях естественных наук, а также во многих отраслях техники. Это важно для геофизики, механики грунтов, реологии, литейного дела, керамического и бумажного производства, текстильной промышленности, производства изоляционных материалов и в других областях [13]. Возрастание интереса исследователей к конвективным течениям связано с обширностью и актуальностью указанных приложений, необходимостью решения конкретных инженерных задач, теоретической важности исследований.

Конвективные потоки возникают при промерзании и протаивании грунтов в Арктических и Субарктических районах. Для того, чтобы обезопасить эксплуатацию техногенных объектов в областях распространения многолетнемерзлых пород, необходимо учитывать конвекцию при проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений (зданий, скважин, трубопроводов, дорог и пр.). Для обеспечения устойчивости грунтов используют различные инженерные методы [55]. Для охлаждения грунта под опорами сооружений (под всем сооружением) тепло из грунта отводится при помощи труб, заполненных различными теплоносителями. Верхний слой грунта, чаще всего это высокопористый песок, подстилаемый многолетнемерзлыми породами, в тёплый период оттаивает и образует переувлажненный слой породы. В грунте возникают конвективные течения

жидкости, которые оказывают существенное воздействие на тепломассоперенос. Из-за трудностей исследования конвективных течений путём прямого физического эксперимента, применяют различные математические модели, основанные на законах тепломассопереноса в водонасыщенных пористых средах.

Первые исследования тепловой устойчивости конвективных течений в изотропных пористых средах приведены в работах [75, 77, 79]. Получены результаты о потере устойчивости и формировании конвективных режимов. Определены критические пороги температуры, когда система теряет устойчивость и возникают конвективные течения. Позднее изучением устойчивости конвективных течений в пористых средах занимались авторы [48, 49, 16, 1, 4, 10, 15, 30, 38, 41, 50, 54, 22].

Теоретическим исследованиям естественной конвекции в вертикальных полостях посвящены работы зарубежных авторов [91, 92, 63], численные исследования были проведены авторами [62, 66], а экспериментальные работы [78, 86].

Задачи конвективных течений в неоднородных пористых средах решались в работах [67, 73, 85]. В работе [68] приведён анализ влияния анизотропной проницаемости на конвективные течения. Конвективные течения в пористом слое с анизотропией тепловых свойств изучалась в [46].

Вместе с тем недостаточное внимание уделяется изучению влияния инверсии плотности воды на конвективные течения в пористых средах. Явление инверсии плотности воды влияет на структуру фильтрационного течения и на изменение темпов тепломассопереноса. При некоторых условиях холодная жидкость начинает подниматься, охлаждая верхние слои пористой среды, что приводит к изменению теплопереноса, возникновению гидродинамической неустойчивости [1, 68].

При моделировании процессов переноса примесей в насыщенных геологических пластах наличие максимума плотности воды не учитывается

[29, 18]. Как показывает наше исследование, при определённых условиях, необходимо учитывать инверсию плотности воды.

### **1.6 Конвективное течение при кристаллизации воды**

Кристаллизация воды, вызванная фазовым переходом вода-лёд в водонасыщенных пористых средах широко распространённое в природе явление, мы сталкиваемся с ним ежедневно и повсеместно. Корректное описание этого явления – безусловно, актуальная задача.

Фазовый переход в пористой среде – это сложный физический процесс, при моделировании которого необходимо учитывать перенос тепла и массы, теплофизические, механические и петрофизические свойства пористой среды, свойства флюида и их изменение в зависимости от температуры и давления [17, 20]. Зачастую, при моделировании таких систем исследователи сталкиваются с недостатком данных о свойствах пористых сред и флюидов, что приводит к необходимости использовать те или иные допущения или модели. В результате охлаждения пористой среды, приводящего к кристаллизации воды, возникает градиент температуры, который приводит к образованию конвективного движения воды в пористой среде. Конвективные потоки влияют на поступление тепла в область фазового перехода, что может существенным образом определять степень промерзания пористой среды. Однако, при моделировании фазового перехода в пористой среде конвективные потоки как правило не учитываются, а это не всегда корректно, в некоторых случаях ими нельзя пренебрегать [47].

Первые экспериментальные исследования замерзания поровой влаги в промерзающих грунтах были проведены Сумгиным М.И., показал наличие передвижения воды к фронту промерзания в замораживаемом образце и предложил теоретическое объяснение возникновения объемной деформации в промерзающем грунте [51].

Попытки математического описания движения жидкости в промерзающем грунте представлены в работах [36, 25]. Получены аналитические решения процессов взаимовлияния переноса тепла и влаги в пористых грунтах.

В работе [3] методами гильберт-оптики, сдвиговой интерферометрии и численного моделирования исследована структура и эволюция конвективных структур, индуцированных нестационарными граничными условиями в горизонтальном слое воды, ограниченном плоскими теплообменными поверхностями, в условиях монотонного охлаждения.

Численная реализация теплофизических задач и задач напряженно-деформированного состояния грунта при промерзании и оттаивании приведены в работе [32]. Даны алгоритмы решения задач промерзания, морозного пучения и оттаивания грунтов в пространственных условиях. Выполнено сопоставление с фактическими данными.

Замерзание воды или плавление льда в грунте вызывает относительное перемещение компонентов и может приводить к необратимым структурным и текстурным изменениям. Так оттаивание сезонно-мерзлых грунтов приводит к разрушению дорожного покрытия дорог [93], к деформации железнодорожного полотна [28]. Анализ влияния сезонного промерзания и оттаивания глинистых грунтов на фундаменты строящихся объектов приведен в работе [53]. Разрушение и деформирование конструкций приводит к большому экономическому ущербу. В работе [37] приведен анализ возможного ущерба от несущей способности фундаментов зданий и сооружений в результате оттаивания грунта. Была проведена оценка 39 муниципальных образований, расположенных в Арктической зоне РФ, показано, что (к середине столетия) сумма ущерба может быть значительна.

Наиболее полный обзор работ по фазовому переходу в пористых средах приведён в работах [57, 31, 56].

При проектировании зданий и сооружений в районах многолетнемёрзлых грунтов долгое время не учитывали передачу тепла за счёт конвективного

теплопереноса, ограничиваясь в расчётах лишь передачей тепла за счёт теплопроводности. В 2014 году научно-производственное объединение «Фундаментстройаркос», на языке программирования ФОРТРАН-IV усовершенствовало свою систему прогнозных расчетов растепления многолетнемёрзлых грунтов, создав версию программы Frost 3D Universal, которая определяет динамику протаивания многолетнемёрзлых грунтов от различных объектов, имеющих положительную температуру [23]. В основу математической модели была заложена методика, описанная в РСН 67-87 [27]. Отличительной особенностью программы являлся учёт переноса теплоты в грунтах не только за счёт теплопроводности (кондуктивный перенос), но также за счёт конвективного переноса тепла при заданной постоянной скорости фильтрации влаги в грунте, что существенно увеличивает точность оценки поведения вечномёрзлых пород в условиях эксплуатации промышленных объектов, но в данной программе не учитывалась инверсия плотности воды.

### **1.7 Заключение по главе 1**

Проведённый обзор показал, что к настоящему времени существует значительное количество работ, описывающих свободную конвекцию в воде и водонасыщенных пористых средах. Вместе с тем недостаточное внимание уделяется изучению влияния инверсии плотности воды на конвективные течения. Тем не менее явление инверсии плотности воды приводит к изменению структуры фильтрационного течения и темпов тепломассопереноса.

Для изучения рассматриваемых в работе физических процессов построим математические модели для трёх случаев. Первый – конвективное течение воды в цилиндрическом сосуде; второй – фильтрация воды в пористой среде; третий – фильтрация воды в пористой среде с учётом возможного образования/разложения льда.



## ГЛАВА 2. КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В СОСУДЕ С ОХЛАЖДАЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В практике распространены и актуальны задачи конвективного переноса около цилиндрической вертикально расположенной трубы, помещенной в водную среду. К примеру: опора моста в озере или устье скважины на шельфе, трубопроводы на обводненных участках и др. В таких задачах всегда существует свободная поверхность, на которой есть градиент температуры и ненулевое поверхностное натяжение. Для изучения данного класса задач предложена математическая модель свободного конвективного течения воды в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом при инверсии её плотности. Одновременно с инверсией плотности воды учитываются натяжение на свободной поверхности (эффект Марангони), а также зависимости динамической вязкости, теплоёмкости и теплопроводности воды от температуры.

### 2.1 Математическая модель

Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный водой, радиуса  $R$ , высотой  $h$ , в центре которого вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент радиусом  $r_s$  (рис. 2.1.1).

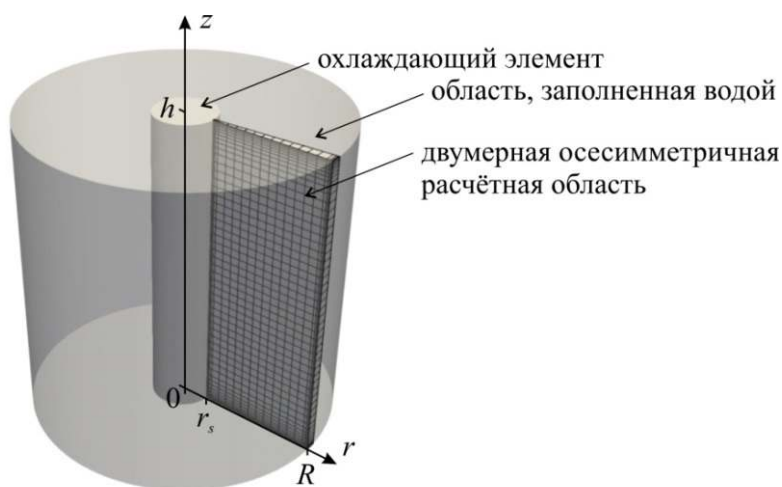


Рисунок 2.1.1. Геометрия рассматриваемой задачи.  $R$  – радиус расчётной области;  $r_s$  – радиус охлаждающего элемента;  $h$  – высота расчётной области

В модели свободного конвективного течения воды при инверсии её плотности приняты следующие допущения: плотность, вязкость, теплоёмкость, теплопроводность и поверхностное натяжение воды зависят только от температуры. Физико-математическая модель включает систему, состоящую из уравнений неразрывности, Навье – Стокса и сохранения энергии для несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\rho_w \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_w (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \rho_w \vec{g} + \mu \Delta \vec{u}, \quad (2.1.2)$$

$$\rho_w c_w \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w c_w \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda_w \nabla T) = 0. \quad (2.1.3)$$

где  $t$  – время (с);  $\vec{u}$  – вектор скорости движения воды (м/с);  $p$  – давление (Па);  $T$  – температура (К);  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения (м/с<sup>2</sup>);  $\rho_w(T)$  – плотность воды (кг/м<sup>3</sup>), немонотонно зависящая от температуры;  $\mu(T)$  – динамическая вязкость воды (Па·с);  $c_w(T)$  – теплоёмкость воды (Дж/(кг·К));  $\lambda_w(T)$  – коэффициент теплопроводности воды (Вт/(м·К)).

Для описания зависимости плотности ( $\rho_w$ ), динамической вязкости ( $\mu$ ), теплоемкости ( $c_w$ ), теплопроводности ( $\lambda_w$ ) и поверхностного натяжения ( $\sigma$ ) воды от температуры использовались полиномиальные интерполяции:

$$f(T) = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 + c_4 T^4 + c_5 T^5 \quad (2.1.4)$$

Значения полиномиальных коэффициентов для моделируемых характеристик воды приведены в таблице 2.1.1. Коэффициенты брались из работ [70] и [84], в которых ранее проводилось моделирование конвективных течений вблизи максимума плотности воды.

Таблица 2.1.1. Коэффициенты для полиномиальной интерполяции физических характеристик воды

|       | $\rho_w$ , кг/м <sup>3</sup> | $\mu$ , Па·с  | $c_w$ , Дж/(кг·К) | $\lambda_w$ , Вт/(м·К) | $\sigma$ , Н/м |
|-------|------------------------------|---------------|-------------------|------------------------|----------------|
| $C_0$ | 9,3456E-2                    | 0,5118959     | 43367,73          | -0,869083936           | 7,5599E-2      |
| $C_1$ | 8,660272                     | -0,5078044E-2 | -393,1164         | 8,94880345E-3          | -1,344E-4      |
| $C_2$ | -2,3437E-2                   | 0,1689541E-4  | 1,31672           | -1,5836635E-5          | -5,00E-7       |
| $C_3$ | 1,878703E-5                  | -0,1882334E-7 | -1,472514E-3      | 7,97543259E-9          | 1,00E-9        |

В силу того, что процесс имеет осевую симметрию, и параметры не зависят от угла, расчёты проводились в двумерной осесимметричной постановке.

В начальный момент времени температура во всей области равна  $T_0$  и, соответственно, скорость конвективного течения равна нулю:

$$T(r, z, 0) = T_0; \vec{u}(r, z, 0) = 0.$$

Все стенки сосуда (кроме охлаждающего стержня) теплоизолированные, а на охлаждающем стержне задаётся постоянная температура  $T_s$ . На боковых стенках сосуда и на границе стержня принимались граничные условия прилипания жидкости к стенкам:

$$T(r_s, z, t) = T_s, \quad \vec{u}(r_s, z, t) = 0; \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial T(R, z, t)}{\partial r} = 0, \quad \vec{u}(R, z, t) = 0; \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad \vec{u}(r, 0, t) = 0; \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial T(r, h, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.1.8)$$

Основной характеристикой свободной поверхности у жидкостей является поверхностное натяжение – это сила, обусловленная взаимным притяжением молекул жидкости, направленная по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно к участку контура, ограничивающего поверхность, в сторону

её сокращения. В случае с водой, как и для большинства других жидкостей, оно зависит от температуры. Изменение поверхностного натяжения воды в зависимости от температуры имеет типичный для жидкостей вид и представлено на рисунке 2.1.2. Данные получены из технического справочника [72], они интерполировались полиномом третьей степени, коэффициенты которого приведены в табл. 2.1.1.

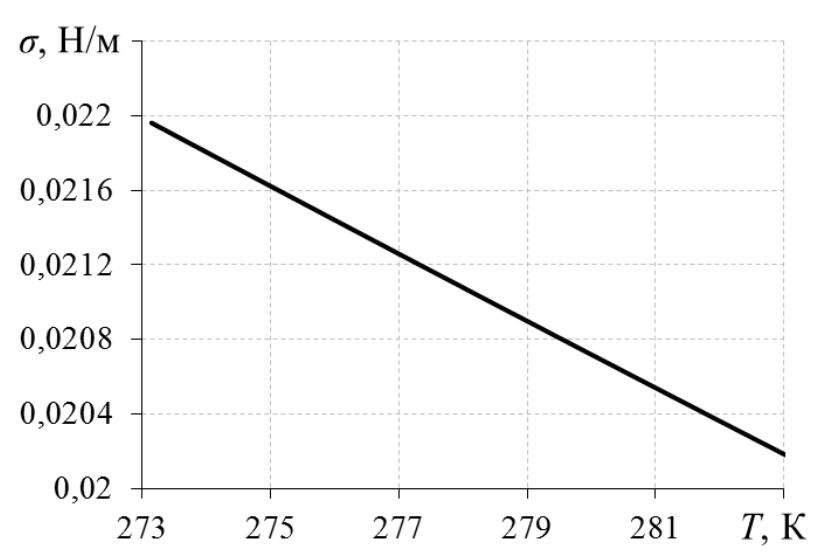


Рисунок 2.1.2. Зависимость поверхностного натяжения ( $\sigma$ ) от температуры

Движение жидкости на свободной поверхности в результате зависимости поверхностного натяжения от температуры характеризуют безразмерным числом Марангони:

$$Ma = \frac{d\sigma}{dT} \frac{1}{\chi\mu} L\Delta T.$$

где  $\chi$  – температуропроводность;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $L$  – некий характерный размер области;  $\Delta T = T(h, r_s) - T(h, R)$  – разница температур на стержне и на внешней границе области.

Подставляя параметры, приведённые в таблице 2.1.1, можем определить число Марангони на верхней границе сосуда. При охлаждении, уменьшается

разность температур  $\Delta T$  на верхней границе цилиндра, вследствие чего число Марангони убывает (рис. 2.1.3).

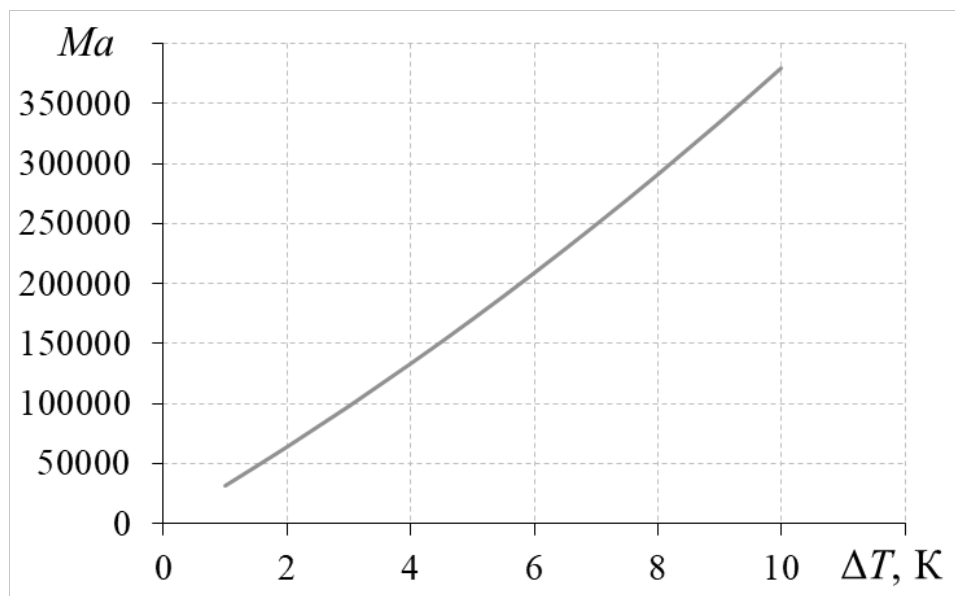


Рисунок 2.1.3. Зависимость числа Марангони от перепада температур на верхней границе области

На начальном этапе моделирования, конвективное течение, вызванное эффектом Марангони, наиболее сильное, так как разница температур на стержне и на внешней границе области максимальна, по мере охлаждения воды в сосуде, разница температур сокращается, и конвективное течение уменьшается. Роль конвекции, вызванной эффектом Марангони, уменьшится примерно в 7 раз (рис. 2.1.3).

Численное исследование влияния поверхностного натяжения на структуру течения проводилось для трёх вариантов граничных условий на верхней границе цилиндрического сосуда:

1. Свободная поверхность с учётом поверхностного натяжения:

$$\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{d\sigma}{dT} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad u_z = 0. \quad (2.1.9)$$

2. Свободная поверхность без учёта поверхностного натяжения (условие проскальзывания):

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \quad u_z = 0. \quad (2.1.10)$$

3. Условие прилипания (поверхность жидкости закрыта крышкой):

$$\vec{u}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.1.11)$$

Здесь  $z$  – вертикальная координата (м);  $r$  – радиальная координата (м);  $u_r$  и  $u_z$  – радиальная и вертикальная компоненты скорости (м/с);  $\sigma(T)$  – коэффициент поверхностного натяжения на границе вода-воздух, который зависит от температуры (Н/м);  $\Gamma$  – верхняя граница цилиндрического сосуда.

## 2.2 Результаты численного моделирования

Конвективный поток моделировался в цилиндрическом сосуде радиуса  $R = 0,05$  м, высотой  $h = 0,1$  м. В центр сосуда помещён вертикальный охлаждающий элемент радиусом  $r_s = 0,01$  м (рис. 2.1.1). Начальная температура воды принималась равной 283 К. Температура охлаждающего стержня за 10 секунд линейно понижалась до 273 К. Рассчитывалось 4200 секунд развития конвективного течения, за это время вода в сосуде практически полностью охлаждается и конвективное течение останавливается. Вычислялись средняя температура воды, средняя скорость течения, поля скоростей и температур в разрезе сегмента в зависимости от времени эксперимента.

Численное моделирование производилось с использованием открытой интегрируемой платформы для численного моделирования задач механики сплошных сред OpenFOAM. Расчёты проводились на прямоугольной сетке, состоящей из 4000 элементов, размер расчётной области 0,01x0,04 м. Для проверки сходимости решения вычисления повторены на сетке с 9000 и 16000 ячеек. Расчёты на плотных сетках занимают значительный временной ресурс. Так расчёт конвективного потока на сетке с 4000 ячейками занимает около 1 часа, такой же расчёт на сетке с 9000 ячейками потребовал 6,5 часов расчёта, а на сетке с 16000 ячеек более 24 часов. Вычисления проводились на компьютере

с процессором AMD FX-8350 с тактовой частотой 4000 МГц и оперативной памятью 24 ГБ.

Конвективное течение, развивающееся в цилиндрическом сосуде с водой, в центре которого вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент, проходит ряд характерных стадий. Первоначально возникает нисходящее конвективное течение воды вдоль стенки (границы) охлаждающего элемента (рис. 2.2.1, 2.2.2 при  $t = 200$  с), холодная вода распространяется вдоль дна сосуда, накапливается в его нижней части. В точке соприкосновения дна сосуда с охлаждающим элементом формируется область самых низких температур, в которой достаточно быстро температура становится ниже температуры максимума плотности, что приводит к возникновению восходящего потока вдоль охлаждающего элемента (рис. 2.2.1, 2.2.2 при  $t = 1000$  с). Восходящий поток оттесняет нисходящий конвективный поток от охлаждающего элемента, при этом температурный пограничный слой утолщается, градиенты температуры становятся меньше, теплообмен происходит медленнее. По мере охлаждения воды в сосуде область, в которой нисходящий поток оттесняется от охлаждающего элемента восходящим потоком, увеличивается, точка «соприкосновения» потоков поднимается. Достигнув поверхности, холодная, более легкая вода быстро распространяется по ней (рис. 2.2.1, 2.2.2 при  $t = 2000$  с), занимая верхнюю часть сосуда, течение инвертируется, вдоль охлаждающего элемента формируется восходящий конвективный поток. Такой режим течения сохраняется вплоть до полного охлаждения воды в сосуде (рис. 2.2.1, 2.2.2 при  $t = 3000$  с). С течением времени градиенты температур постепенно уменьшаются, течение останавливается.

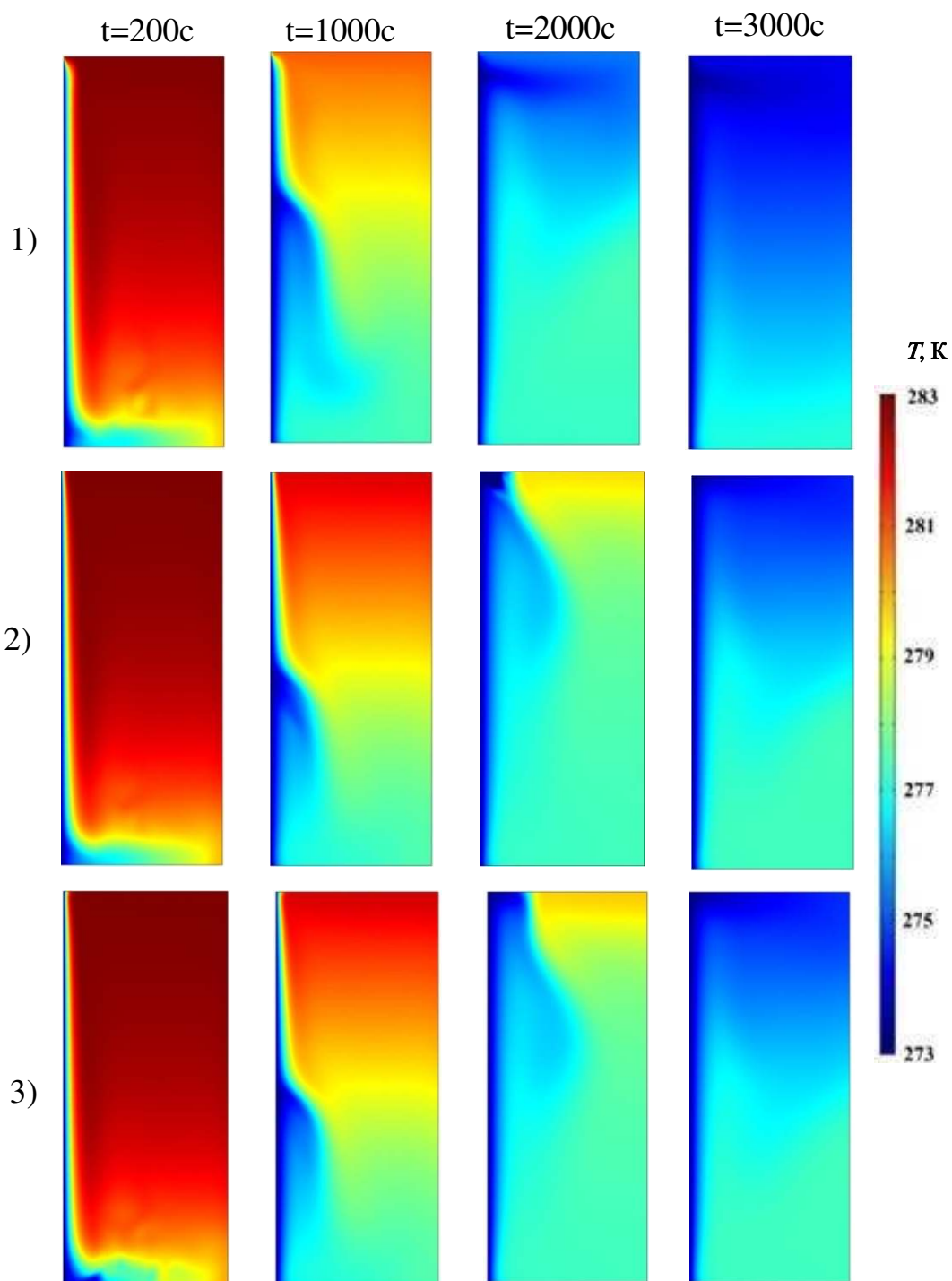


Рисунок 2.2.1. Поле температуры при охлаждении ёмкости в различные моменты времени для трёх различных вариантов граничных условий: *первая* строка — свободная поверхность с имеющимся на ней поверхностным натяжением; *вторая* строка – свободная поверхность без учёта поверхностного натяжения; *третья* строка – условие прилипания (поверхность закрыта крышкой)



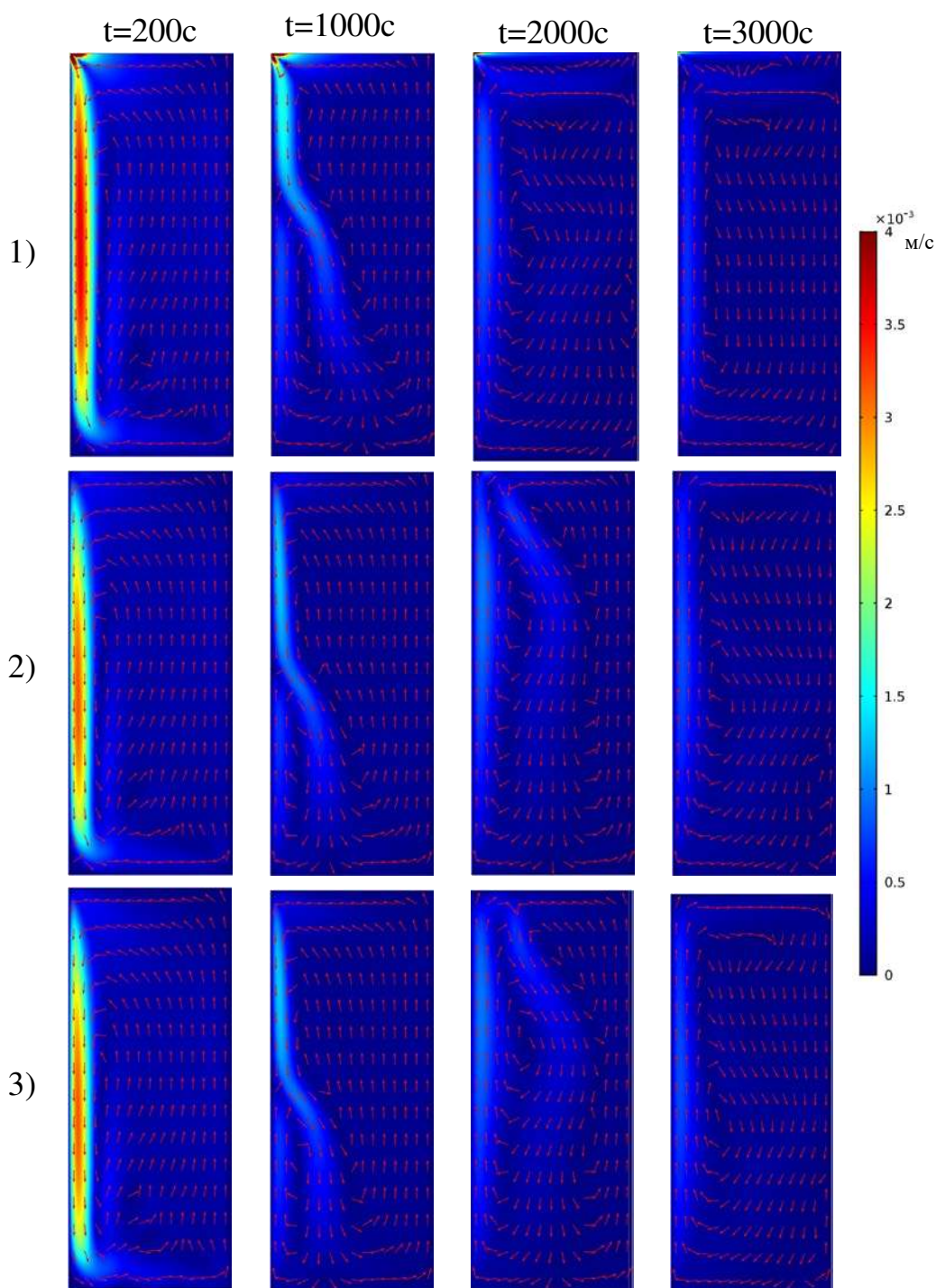


Рисунок 2.2.2. Поле скоростей течения при охлаждении ёмкости в различные моменты времени для трёх различных вариантов граничных условий: *первая* строка — свободная поверхность с имеющимся на ней поверхностным натяжением; *вторая* строка – свободная поверхность без учёта поверхностного натяжения; *третья* строка – условие прилипания (стрелки – направление поля скоростей)

Для всех рассматриваемых в работе граничных условий на свободной границе схема развития течения остается приблизительно одинаковой: сначала преобладает нисходящая конвекция вдоль охлаждающего элемента, затем наблюдается переходный режим, когда нисходящий поток оттесняется от охлаждающего элемента восходящим потоком, далее устанавливается режим, в котором вдоль охлаждающего элемента вода поднимается вверх. Из анализа полей температур и скоростей для трех вариантов граничных условий на верхней границе следует, что поверхностное натяжение значительно ускоряет охлаждение: восходящий поток быстрее достигает поверхности жидкости, и холодная вода накапливается в верхней части сосуда более быстро (рис. 2.2.1, 2.2.2).

Этот вывод подтверждают зависимости средней температуры жидкости в цилиндрическом сосуде от времени, представленные на рисунке 2.2.3. Из рисунка 2.2.3 видно, что средняя температура для случаев 2 и 3, т.е. условия, когда в расчетах не учитывалось поверхностное натяжение на верхней границе и отсутствовала граница раздела фаз, практически совпадает в течение всего времени моделирования. В случае свободной поверхности с имеющейся на ней поверхностным натяжением охлаждение происходит интенсивнее. К примеру, средняя температура 276 К достигается на 778 секунд раньше (на 25% быстрее), чем в случаях, когда поверхностное натяжение не учитывается.

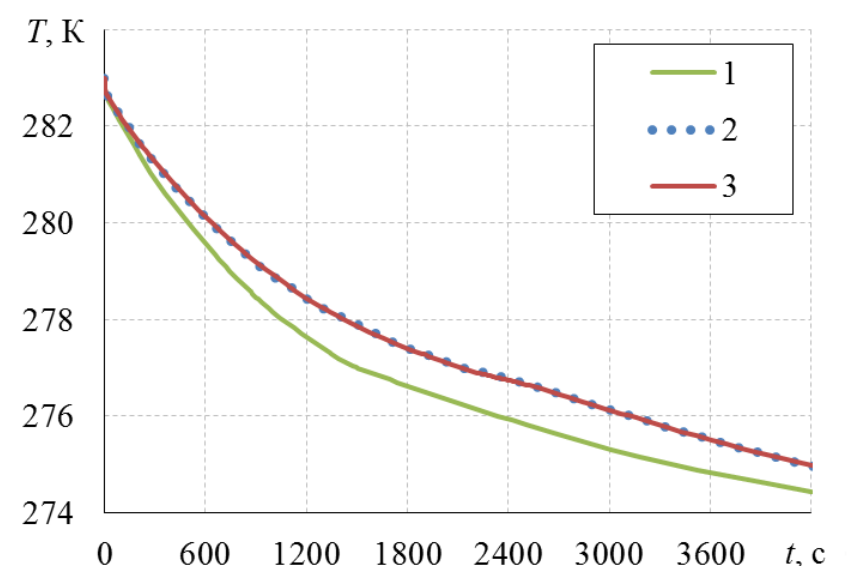


Рисунок 2.2.3. Зависимость средней температуры от времени для трёх различных граничных условий на верхней границе цилиндрического сосуда:  
 1 - свободная поверхность с имеющимся на ней поверхностным натяжением;  
 2 - свободная поверхность без учёта поверхностного натяжения;  
 3 - условие прилипания (поверхность закрыта крышкой)

Более интенсивное охлаждение объясняется интенсификацией конвективного теплопереноса из-за действия эффекта Марангони. Действительно, на свободной границе (рис. 2.2.1, случай 3) движение жидкости более интенсивно, скорости течения возрастают, приводя к более быстрому охлаждению воды в сосуде. Интенсификация теплопереноса происходит из-за того, что поверхностное натяжение на границе вода-воздух практически линейно увеличивается при уменьшении температуры [88], и так как охлаждающий элемент в сосуде более холодный, градиент поверхностного натяжения вызывает движение жидкости от боковой стенки сосуда к охлаждающему элементу, расположенному в центре сосуда. Это увеличивает скорости конвективного течения и ускоряет теплообмен на первой стадии развития течения, когда холодная вода опускается по охлаждающему элементу. Учет влияния поверхностного натяжения, приводит к качественному изменению структуры течения. А именно, поток, вызванный эффектом Марангони,

достаточно силен, и не позволяет восходящему течению, образовавшемуся вдоль охлаждающего элемента на второй стадии развития конвекции, пробиться на поверхность, что приводит к тому, что самая холодная вода распространяется параллельно поверхности на некотором расстоянии от нее. Формируются два вихря (рис. 2.2.1, 2.2.2): верхний обусловлен эффектом Марангони, нижний – свободной конвекцией. Интенсивное вихревое течение приводит к быстрому выравниванию температуры в верхней части сосуда. Градиенты температуры на поверхности становятся малыми и роль поверхностного натяжения в конвективном переносе становится незначительной.

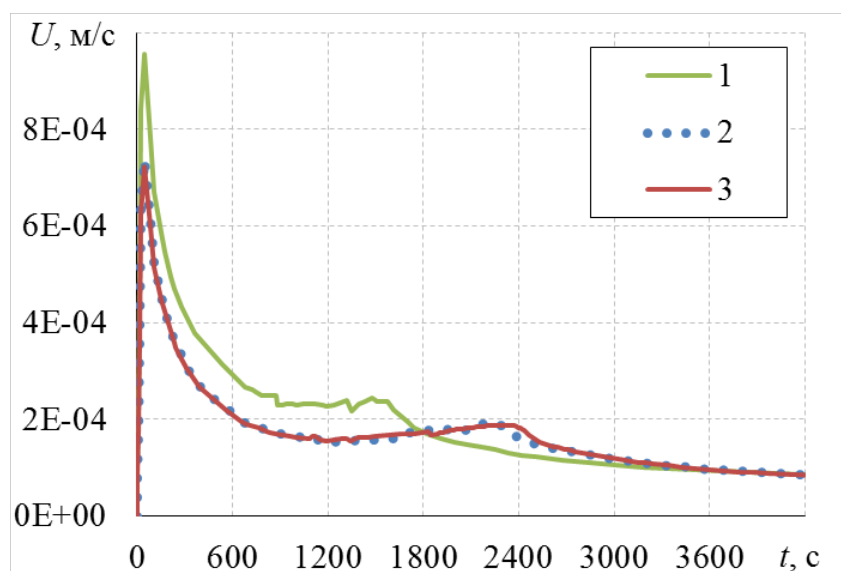


Рисунок 2.2.4. Зависимость средней скорости течения от времени для трёх различных граничных условий на верхней границе цилиндрического сосуда

На рисунке 2.2.4 проведено сравнение средней скорости движения жидкости в сосуде в зависимости от времени охлаждения. На начальном этапе движение жидкости интенсивнее при учёте влияния поверхностного натяжения на верхней границе (кривая 1), чем без учёта влияния поверхностного натяжения и отсутствии границы раздела фаз (кривые 2 и 3). Силы поверхностного натяжения помогают тепломассопереносу, увеличивая скорость движения нисходящего потока, повышая интенсивность его в 1,4 раза. После выхода

холодной воды на поверхность силы поверхностного натяжения препятствуют распределению холодной жидкости вдоль поверхности, поэтому при учёте влияния поверхностного натяжения средняя скорость движения жидкости в сосуде становится ниже, чем без учёта влияния поверхностного натяжения и отсутствии границы раздела фаз. Затем градиенты температур постепенно уменьшаются, происходит остывание жидкости в сосуде, и поверхностное натяжение не влияет на среднюю скорость течения.

В результате, проведено исследование влияния поверхностного натяжения на тепломассоперенос в цилиндрическом сосуде, в центре которого вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент. Детально изучена структура свободных конвективных течений, впервые объяснено взаимное влияние и роли инверсии плотности воды и поверхностного натяжения в тепломассопереносе.

### 2.3 Сопоставление с другими исследованиями

Для проверки корректности модели, было проведено сопоставление с результатами, полученными Cawley в работе [69], в которой охлаждение цилиндрической области проводилось от внешней границы, а не из центра, при немонотонной зависимости плотности воды от температуры. При численном моделировании указанных авторов коэффициент температуропроводности и динамической вязкости воды заданы постоянными величинами, не зависящими от температуры. Эксперимент Cawley, 2004 проводился аналогично эксперименту [1], но с использованием велосиметрии изображения частиц (PIV) для двумерной визуализации структур потока и предоставления количественной информации о поле скоростей. Такие визуализационные исследования позволяют детально объяснить структуру кривых охлаждения.

Цилиндрический стеклянный сосуд диаметром  $51 \pm 1$  мм и высотой  $128 \pm 1$  мм охлаждался от боковых стенок. Цилиндр полностью заполнен жидкостью и закрыт сверху. Верхняя и нижняя стенки теплоизолированные. На

боковых стенках цилиндра принимались условия прилипания. Начальная температура воды внутри цилиндра принималась равной  $+8\text{ }^{\circ}\text{C}$ , температура боковых стенок снаружи цилиндра уменьшалась до  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В нулевой момент времени скорость конвективного течения равнялась нулю. Внутри цилиндра вдоль центральной оси цилиндра на высоте 32, 64 и 96 мм были установлены три термистора (Betatherm, изолированная головка датчика диаметром 2,5 мм, сопротивление 5 кОм при  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), которые регистрировали температуру (точность измерения температуры составляет  $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Коэффициент температуропроводности и динамической вязкости воды заданы постоянными величинами, не зависящими от температуры.

На рисунке 2.3.1 представлены графики температуры от времени, в центре цилиндра на высоте 32, 64 и 96 мм и кривая охлаждения боковых стенок цилиндра с использованием вычислительного пакета OpenFOAM, позволяющего моделировать сложные многопараметрические задачи, (рис. 2.3.1а) и данные эксперимента Cawley (рис. 2.3.1б).

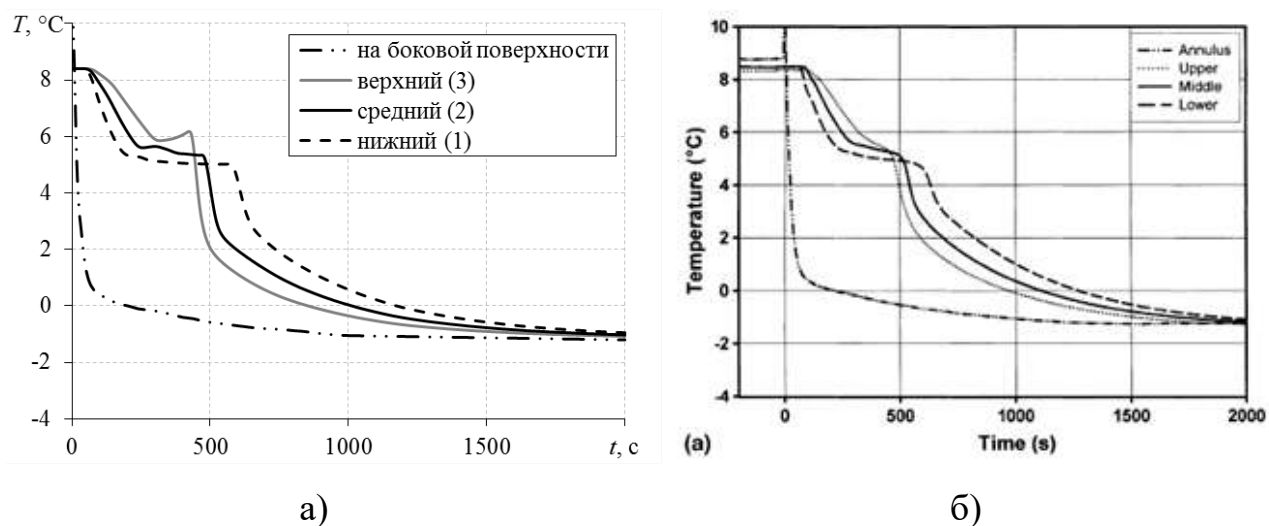


Рисунок 2.3.1. Кривые охлаждения для трех положений датчика температуры вдоль вертикальной центральной оси (нижний – 32 мм, средний – 64 мм, верхний – 96 мм) и температура на боковых стенках цилиндра от времени: (а) результаты численного исследования, с использованием вычислительного пакета OpenFOAM; (б) результаты эксперимента Cawley

В результате сопоставления видно, что кривые дают практически идентичные результаты, но охлаждение в численном эксперименте с использованием вычислительного пакета OpenFOAM происходит интенсивнее.

Также из рисунка 2.3.1а видно, что на верхнем датчике (на высоте 96 мм) в время 300-400 с происходит увеличение температуры примерно на 0,5 градуса. Это связано с тем, что восходящий поток холодной воды, поднимающийся вдоль боковой поверхности цилиндра, достигнув поверхности цилиндра, начинает оттеснять с поверхности тёплую воду (при этом вихрь на поверхности пропадает), остатки тёплой воды начинают двигаться вниз, увеличивая температуру на верхнем датчике.

Также Cawley была проведена серия численных расчётов с использованием модифицированной версии алгоритма двумерной вычислительной гидродинамики (CFD) (пакет NaSt2D), Алгоритм CFD с открытым исходным кодом, доступный в открытом доступе. На рисунке 2.3.2 приведены графики температуры от времени, в центре цилиндра на высоте 32, 64 и 96 мм (а), и поля скоростей течения при охлаждении ёмкости в моменты времени 40, 80, 160, 360, 440, 700 с (b–g), полученные в результате численных расчётов Cawley.

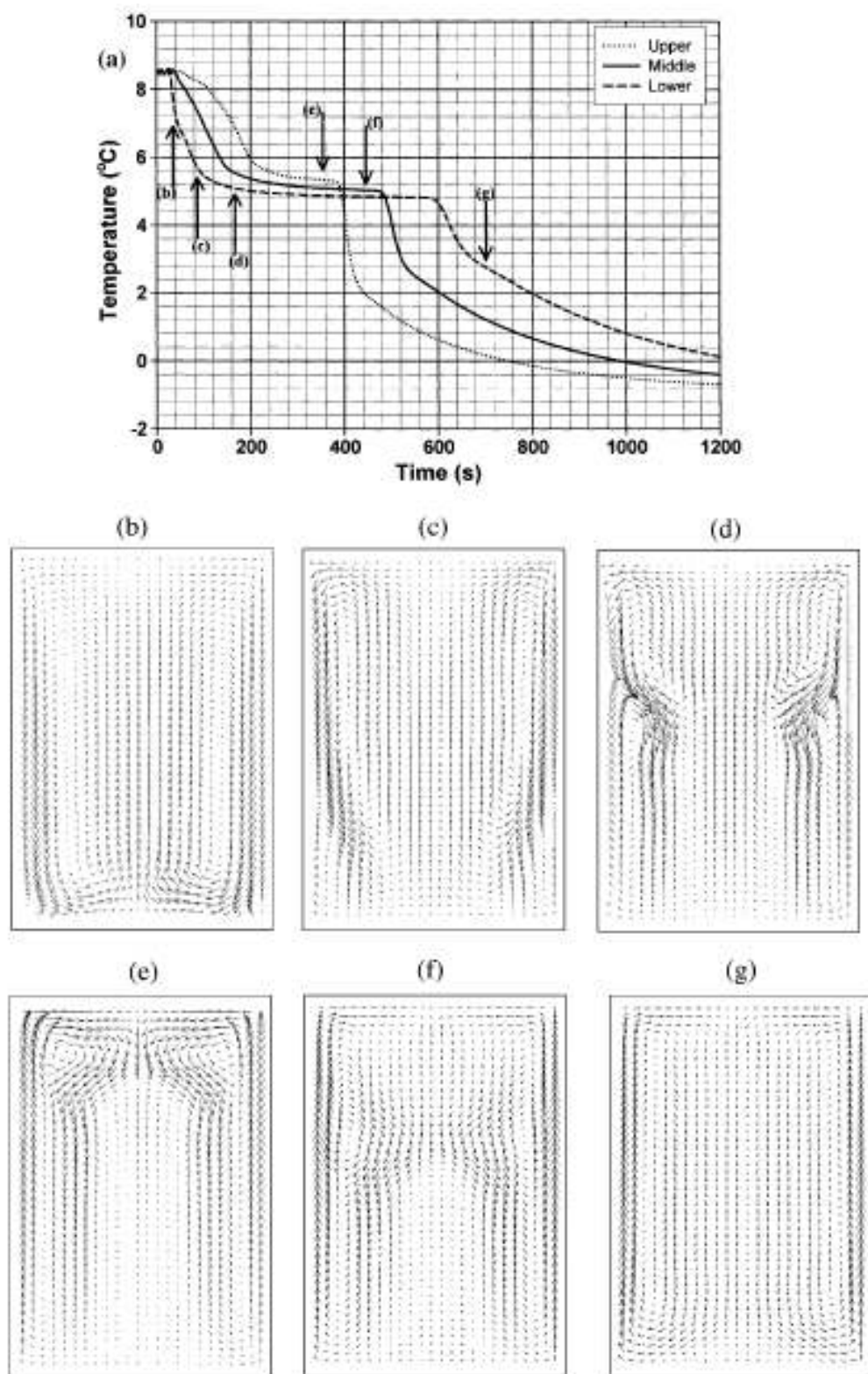


Рисунок 2.3.2 (а) Кривые охлаждения [69] с указанием времени (вертикальные стрелки) для графиков колебаний скорости на (b)–(g). Высота датчиков температуры: 32, 64 и 96 мм для нижнего, среднего и верхнего датчиков соответственно, (b)–(g) графики колебаний скорости, показывающие этапы развития конвективного течения



В те же моменты времени 40, 80, 160, 360, 440, 700 с как на рисунке 2.3.2(б–g), были получены поля скоростей течения, с использованием вычислительного пакета OpenFOAM (рис. 2.3.3).

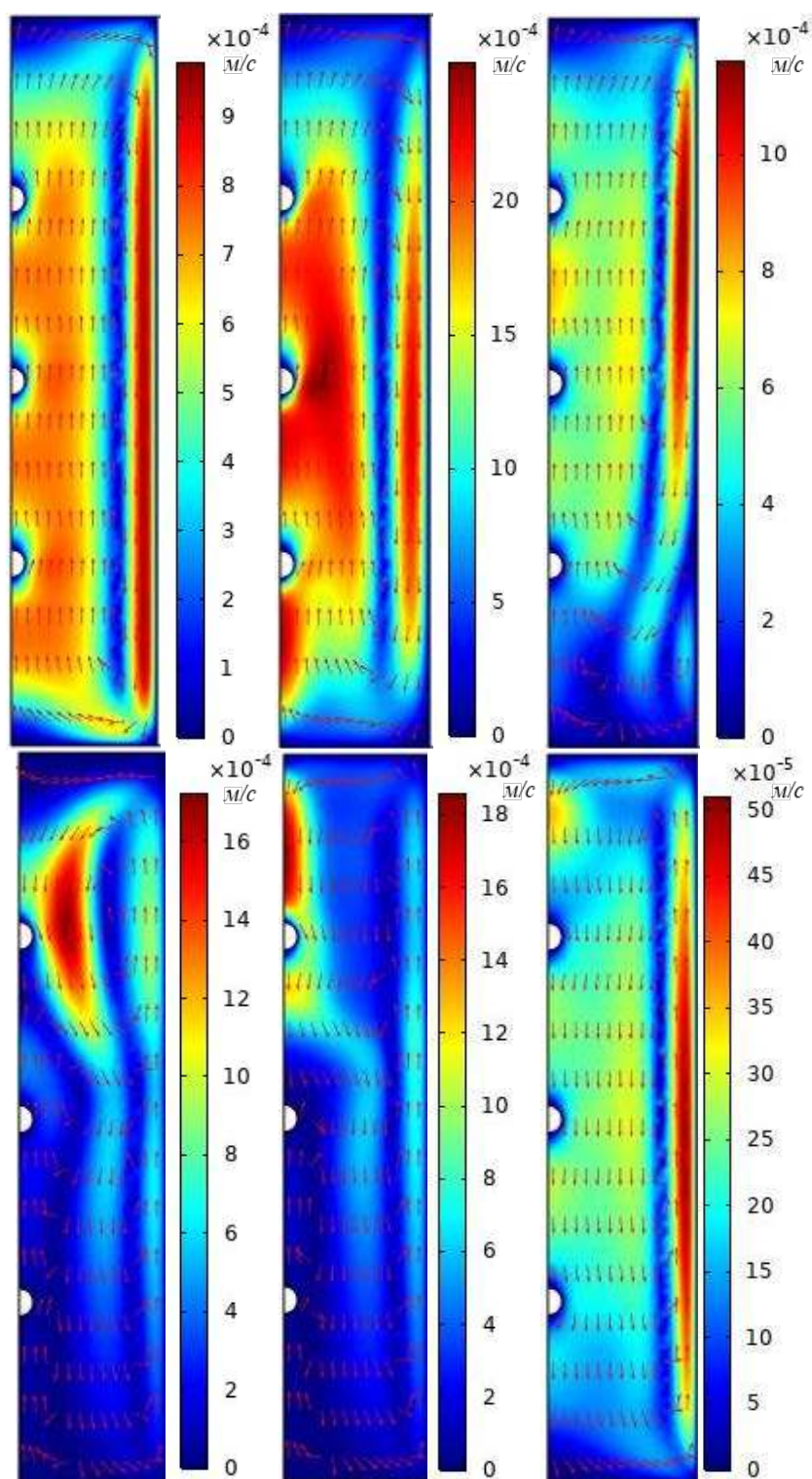


Рисунок 2.3.3. Поле скоростей течения [численный эксперимент] при охлаждении цилиндра в моменты времени 40, 80, 160, 360, 440, 700 с (стрелки – направление поля скоростей)

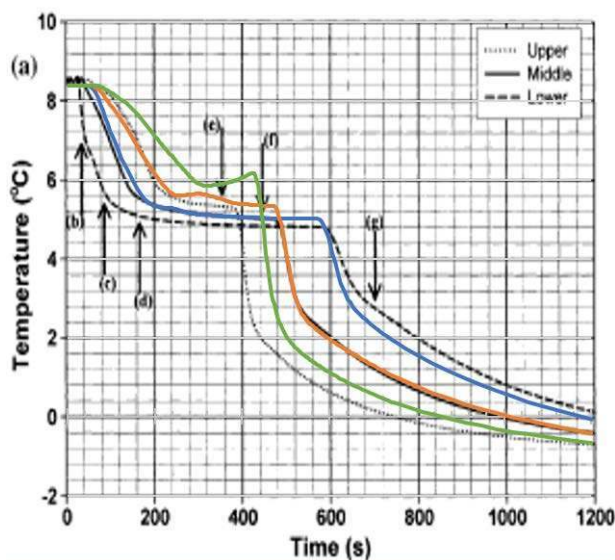


Рисунок 2.3.4. Кривые охлаждения для трех положений датчика температуры вдоль вертикальной центральной оси (нижний – 32 мм, средний – 64 мм, верхний – 96 мм) от времени: *цветные линии* – результаты численного исследования, с использованием вычислительного пакета OpenFOAM; *пунктирные линии* – результаты эксперимента Cawley

На рисунке 2.3.4 приведена зависимость температуры в центре цилиндра на высоте 3,2, 6,4 и 9,6 см от времени; сравнивались результаты численных расчётов, с использованием вычислительного пакета OpenFOAM (цветные линии) и численных расчётов Cawley (пунктирные линии). Охлаждение с использованием вычислительного пакета OpenFOAM медленнее, таким образом, наш численный расчёт точнее описывает эксперимент Cawley. Это может быть связано с тем, что в наших расчётах граничные условия заданы как в эксперименте, а в численных расчётах Cawley задано быстрое изменение температуры. Помимо этого, в нашем численном эксперименте были учтены стеклянные стенки (учитывали теплоперенос через стекло), а также в модели были учтены датчики температуры.

Таким образом, качественно режим течения совпадает с экспериментом Cawley, также как у нас возникает более быстрое охлаждение на 200 с, но наша модель точнее описывает эксперимент.

## 2.4 Заключение по главе 2

Проведено исследование влияния поверхностного натяжения на тепломассоперенос в цилиндрическом сосуде, в центре которого вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент. Детально изучена структура свободных конвективных течений, впервые объяснено взаимное влияние и роли инверсии плотности воды и поверхностного натяжения в тепломассопереносе.

Конвективное течение жидкости при учете влияния поверхностного натяжения более интенсивно, возрастают средние скорости течения, которые приводят к более быстрому охлаждению жидкости в сосуде.

Следует отметить, что применение граничного условия «проскальзывание» (2.1.10) или «прилипание» (2.1.11) практически не влияют на скорость охлаждения воды в сосуде, что объясняется малой величиной скорости движения вдоль свободной поверхности.

Проведенное численное моделирование наглядно показывает, что при расчёте теплообмена в задачах с водой, имеющей температуру близкую к температуре её кристаллизации, необходимо не только учитывать конвективный тепломассоперенос и инверсию плотности воды, но и поверхностное натяжение на свободной границе.

### ГЛАВА 3. КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ

При проектировании и сооружении зданий, скважин, трубопроводов, а также других объектов, постоянно находящихся в условиях отрицательных температур, необходимо учитывать промерзание и протаивание грунтов. В тёплый период поверхностный слой грунта, чаще всего высокопористый песок, оттаивает и образует переувлажненный слой породы. При охлаждении протаявшего слоя, в пористой среде возникают градиенты температуры, приводящие к конвекции.

Влияние конвективного переноса тепла в пористых средах хорошо изучено, но недостаточное внимание уделяется исследованию влияния инверсии плотности воды на конвективные течения в пористых средах. Это явление приводит к полной структурной перестройке всего течения и изменяет темп охлаждения (нагрева) пористой среды. При определенных условиях холодная жидкость начинает подниматься, охлаждая верхние слои пористой среды, что приводит к изменению характера теплопереноса и возникновению гидродинамической неустойчивости. В данной главе представлено численное решение многопараметрической задачи конвективного течения воды в высокопроницаемой пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности, учитывающей зависимость динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды, а также плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры. Многопараметрическая задача решена с использованием известного программного продукта, оценивалось влияние инверсии плотности воды на тепломассоперенос в влагонасыщенной пористой среде в окрестности вертикально расположенной трубы охлаждающего устройства.

### 3.1 Математическая модель

Оценим влияние инверсии плотности воды на тепломассоперенос в водонасыщенной пористой среде в окрестности вертикально расположенного охлаждающего элемента. В водонасыщенной пористой среде радиуса  $R$ , высотой  $h$ , вертикально расположен цилиндрический охлаждающий элемент радиуса  $r_s$ . Схематично моделируемая система показана на рисунке 3.1.1.

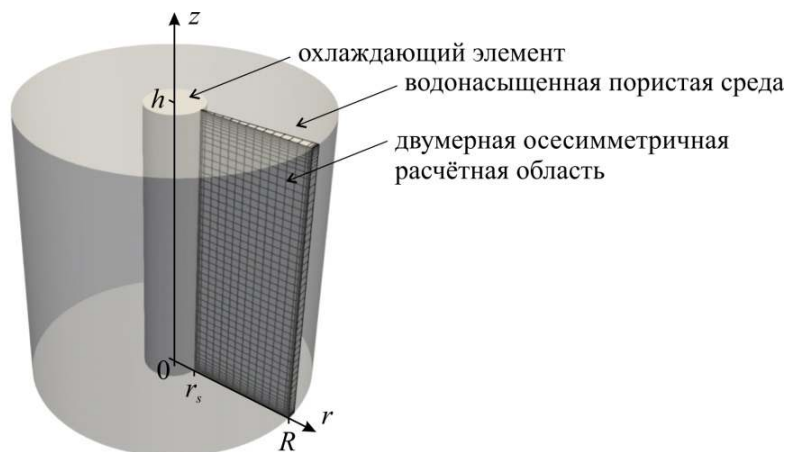


Рисунок 3.1.1. Геометрия рассматриваемой задачи.  $R$  – радиус расчётной области;  $r_s$  – радиус охлаждающего элемента;  $h$  – высота расчётной области

В этой модели допущения для воды аналогичны модели, представленной во второй главе. Зависимости вязкости, теплоёмкости, теплопроводности и поверхностного натяжения воды от температуры принимаются такими же как в предыдущей задаче. Допущения для пористой среды стандартные: пористая среда однородна и изотропна; пористость постоянна; модель однотемпературная, то есть в некотором бесконечно малом объёме температуры пористой среды и насыщающего вещества (воды) совпадают. Учитываются зависимости плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры.

В начальный момент времени система находится в термодинамическом равновесии. Начальная температура воды и пористой среды принималась равной  $T_0 = 283$  К. Температура охлаждающего элемента  $T_s = 273$  К. Все остальные

границы расчётной области непроницаемы для тепла и вещества. В численном эксперименте моделировалось движение воды и контролировалось изменение температуры в водонасыщенной пористой среде.

$$T(r_s, z, t) = T_s, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial T(R, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial T(r, h, t)}{\partial z} = 0. \quad (3.1.4)$$

При наличии градиента температуры в водонасыщенной пористой среде существуют два механизма переноса теплоты: конвективный, т.е. внутренняя энергия переносится движущейся жидкостью и кондуктивный, когда энергия переносится за счёт теплопроводности (кондукции). Степень влияния каждого из этих механизмов определяется структурной характеристикой породы, размером пор, их взаимным расположением, степенью сообщаемости пор, свойствами вещества, заполняющего поровое пространство [5].

Для описания движения жидкости в пористой среде обычно используют линейный закон Дарси либо приближение Бринкмана или Форхгеймера.

Закон Дарси применим в двух случаях: при малых скоростях фильтрации, когда силы инерции очень малы и ими можно пренебречь, и при условии, что жидкость является ньютоновской (т.е. предполагается линейная зависимость тензора напряжений от тензора деформаций) [6]. При больших скоростях фильтрации или высокой пористости линейный закон не применим из-за существенного влияния инерционных эффектов, которые, в частности, могут привести к отрыву потока от поверхности скелета пористой среды [54], линейность связи градиента давления и скорости нарушается. В этом случае лучше использовать закон Форхгеймера (3.1.5) [83], где учитываются инерционные эффекты (инерционная составляющая сопротивлению движению

жидкости). Модель Форхгеймера подразумевает квадратичную зависимость градиента давления от скорости фильтрации [35].

$$\nabla p = \rho \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{u}| \vec{u}, \quad (3.1.5)$$

где  $\beta$  – безразмерный коэффициент, характеризующий структуру пористой среды;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>.

Первое слагаемое в правой части – изменение давления вследствие влияния гравитационного поля, второе слагаемое учитывает потери давления вследствие вязкости жидкости, третье – инерционную составляющую сопротивления движению жидкости. Из формулы следует, что при малых скоростях фильтрации квадратом скорости можно пренебречь, и градиент давления будет зависеть только от первого и второго слагаемых, т.е. движение будет безынерционным, соответствующим закону Дарси. При больших скоростях фильтрации силы инерции становятся существенными и будут сопоставимы или даже преобладать над силами вязкости.

Для учёта сдвигового сопротивления движению жидкости, вызванного пористым каркасом, используют уравнение Бринкмана [64]. В уравнении движения появляется дополнительное слагаемое, которое необходимо учитывать в случаях больших значений пористости, а также когда на границе контакта пористых сред с непористыми средами принимаются условия прилипания и учёт этого члена оправдан для описания пограничного слоя, возникающего в этом случае в пористой среде. Кроме того, модель Бринкмана используют для такой структуры пористого пространства, когда размеры частиц твердой фазы имеют порядок  $3 \cdot \eta$  ( $\eta$  – характерный интервал между соседними частицами). Для более спрессованных частиц (характерный размер которых больше, чем  $3 \cdot \eta$ ) фильтрация удовлетворительно описывается законом Дарси; для частиц, имеющих порядок, меньший чем  $3 \cdot \eta$ , движение может быть описано в рамках полных уравнений Навье – Стокса [35]. Таким образом, приближение Бринкмана позволяет смоделировать структуру поля скорости в вязком

пограничном слое в пористой среде. В работе [54] приведено сравнение моделей пористой среды Дарси и Бринкмана в приближении Буссинеска, которое учитывает зависимость плотности жидкости от температуры. Показано, что применение модели Дарси – Буссинеска приводит к завышению скорости движения жидкости, а также к более интенсивному охлаждению анализируемого объекта в отличие от модели Бринкмана – Буссинеска. Таким образом, модель Дарси – Буссинеска не может быть применена в случае, если инерционные силы имеют один порядок с вязкими силами.

В соответствии с выше сказанным, для моделирования конвекции в высокопроницаемой водонасыщенной пористой среде вблизи охлаждающего элемента корректнее применять модель Бринкмана – Буссинеска.

Система уравнений для описания конвективных течений в пористой среде в приближении Бринкмана – Буссинеска имеет вид:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\rho_w}{m} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho_w \vec{g} + \frac{\mu}{m} \Delta \vec{u} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \quad (3.1.7)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w c_w \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = 0, \quad (3.1.8)$$

где  $\vec{u}$  – скорость фильтрации воды (м/с);  $\rho_w(T)$  – плотность воды (кг/м<sup>3</sup>), зависящая от температуры,  $p$  – давление (Па),  $m$  – пористость;  $k$  – проницаемость пористой среды (м<sup>2</sup>);  $\mu(T)$  – динамическая вязкость воды (Па·с);  $\lambda = (1 - m)\lambda_s(T) + m\lambda_w(T)$  – коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды (Вт/(м·К));  $\lambda_s(T)$  и  $\lambda_w(T)$  – коэффициент теплопроводности пористой среды и воды, соответственно (Вт/(м·К));  $\rho c(T) = (1 - m)\rho_s(T)c_s(T) + m\rho_w(T)c_w(T)$  – объёмная теплоёмкость насыщенной пористой среды (Дж/(м<sup>3</sup>·К));  $\rho_s(T)$  – плотность пористой среды (кг/м<sup>3</sup>);  $c_s(T)$  – теплоёмкость пористой среды (Дж/(кг·К)).



### 3.2 Безразмерный параметр $\alpha$

Для определения безразмерных параметров, определяющих структуру течения, преобразуем уравнение (3.1.8) разделив каждое слагаемое на  $\rho c$  и обозначив  $\chi = \lambda/\rho c$  – коэффициент температуропроводности насыщенной пористой среды ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_w c_w}{\rho c} \vec{u} \cdot \nabla T - \chi \Delta T = 0 \quad (3.2.1)$$

Второе слагаемое в формуле (3.2.1) изменение температурного поля, вызванное движением среды, т.е. перенос тепла за счёт конвективного движения воды. Третье слагаемое в (3.2.1) изменение температурного поля за счёт теплопроводности. Отношение этих слагаемых определяет режим теплопередачи в пористой среде.

С помощью уравнения (3.2.1) введём безразмерный параметр  $\alpha$ , как отношение изменения температуры за счёт конвекции к изменению температуры за счёт теплопроводности:

$$\alpha = \frac{\rho_w c_w u_h h}{\rho c \chi} \quad (3.2.2)$$

где  $h$  – характерный размер, в моделируемом случае – это высота охлаждающего элемента (м);  $u_h$  – характерная скорость фильтрации жидкости (м/с).

Характерную скорость фильтрации жидкости в (3.2.2) оценим исходя из того, что перепад температур приводит к разности плотностей, вследствие чего возникает перепад давления, вызывающий конвективное течение. Перепад давления свяжем со скоростью течения законом Дарси. Следовательно:

$$u_h = \frac{k \nabla P}{\mu h} = \frac{k(\rho_{w_{max}} - \rho_{w_0}) g h}{\mu h} = \frac{k g \rho_{w_{max}} - \rho_{w_0}}{\nu \rho_w} \quad (3.2.3)$$

где  $(\rho_{w_{max}} - \rho_{w_0}) = 0,129$  – разность характерных значений плотности воды при  $3,98$  °С и  $0$  °С ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $\nu$  – кинематическая вязкость воды ( $\text{м}^2/\text{с}$ ).

В связи с тем, что в данной работе исследуются течения вблизи максимума плотности воды и кристаллизации, в качестве оценки изменения плотности

используем разность плотности воды в максимуме её плотности и при нулевой температуре. Это допущение накладывает ограничения на область применения параметра альфа, он применим в диапазоне температур от 0 °С до 8 °С.

С учетом (3.3.3) запишем:

$$\alpha = \frac{(\rho_{w_{max}} - \rho_{w_0})c_w kgh}{\rho c \nu \chi}, \quad (3.2.4)$$

По своему физическому смыслу предложенный параметр – соотношение конвективного и кондуктивного теплового потока ни что иное, как модифицированное число Пекле.

Предлагаемый параметр  $\alpha$  позволяет, применяя принципы подобия и размерности механики, масштабировать геометрические параметры области моделирования.

Используя (3.2.4) перед расчетом или при анализе реальной задачи, можно оценить вклад конвективного и кондуктивного теплопереноса в общую теплопередачу рассматриваемой термодинамической системы. Если параметр  $\alpha < 1$ , то конвективный теплоперенос медленнее переноса тепла посредством теплопроводности. Если  $\alpha \approx 1$ , то перенос тепла посредством конвекции сопоставим с переносом тепла посредством теплопроводности. Если  $\alpha > 1$ , то конвекция играет определяющую роль в изменении температуры.

### **3.3 Численное моделирование охлаждения пористой среды при учёте инверсии плотности воды**

При планировании численного эксперимента, для упрощения задачи, было решено использовать конечную моделируемую область, и ограничиться радиусом расчётной области  $R = 2h$  (рис. 3.1.1). Это решение обусловлено следующими соображениями. Вообще говоря, в подобных системах движение возникает во всём объёме жидкости. Вдоль охлаждающего элемента в пористой среде возникает достаточно тонкий пограничный слой, в котором жидкость движется, к примеру, холодная вода опускается вдоль стенки охлаждающего элемента,

достигает дна цилиндра и оттесняет воду вдоль дна цилиндра в бесконечность, а в верхней части цилиндра из бесконечности жидкость «всасывается» в пограничный слой. Вследствие чего возникает неравномерность распределения температуры по высоте. По мере удаления от центра, за счет теплового обмена эта неоднородность сглаживается и на расстоянии большем, чем высота расчетной зоны становится не существенной. Кроме того, движение происходит в цилиндрической области, из-за чего радиальная составляющая скорости обратно пропорциональна расстоянию от центра и в соответствии с (3.2.4) параметр  $\alpha$  быстро уменьшается и роль конвективного теплопереноса становится ничтожной. Для проверки обоснованности этих соображений выполнены несколько расчетов для различных значений  $R$  и установлено, что для  $R > 2h$  характеристики течения вблизи охлаждающего элемента (величины и профили скоростей и поля распределения температур) существенно не изменяются.

Численное моделирование производилось методом конечных объемов с использованием вычислительного пакета OpenFOAM. Задача имеет радиальную симметрию, поэтому расчёты проводились в двумерной осесимметричной постановке. Проверка сходимости выполнена по методике, описанной в [47].

Конвективное течение воды в пористой среде моделировалось в цилиндрическом сосуде радиуса  $R = 0,2$  м, высотой  $h = 0,1$  м. В центр цилиндра помещён вертикальный охлаждающий элемент радиусом  $r_s = 0,01$  м (рис.3.1.1).

Пористость принималась  $m = 0,4764$ , что соответствует кубическому типу упаковки сфер частиц пористой среды [26].

Для описания зависимости плотности, теплоемкости и теплопроводности скелета пористой среды от температуры использовались такие же полиномиальные интерполяции как для воды (2.1.1). В таблице 3.1.1 приведены значения полиномиальных коэффициентов для скелета пористой среды.

Таблица 3.1.1. Коэффициенты для полиномиальной интерполяции физических характеристик скелета пористой среды

|                | $\rho_s$ , кг/м <sup>3</sup> | $c_s$ , Дж/(кг·К) | $\lambda_s$ , Вт/(м·К) |
|----------------|------------------------------|-------------------|------------------------|
| C <sub>0</sub> | 1354,21                      | 115,3022          | 0,1498458              |
| C <sub>1</sub> | 0,04303577                   | 3,063043          | 0,005193887            |
| C <sub>2</sub> | 1,137786E-4                  | 0,003472486       | 1,138604E-5            |
| C <sub>3</sub> | 3,453539E-8                  | 1,817176E-6       | 1,017063E-8            |
| C <sub>4</sub> | 0                            | 3,515478E-10      | 4,122789E-12           |
| C <sub>5</sub> | 0                            | 0                 | 6,547539E-16           |

Начальная температура насыщенной водой горной породы принималась равной 283 К. Температура охлаждающего стержня за 30 секунд линейно понижалась до 273 К.

Все стенки сосуда (кроме охлаждающего стержня) теплоизолированные. На боковых стенках сосуда принимались граничные условия проскальзывания жидкости. В нулевой момент времени скорость конвективного течения равнялась нулю.

### **Конвективное течение воды в пористых средах при $\alpha \gg 1$**

Численный эксперимент показывает, что, развиваясь во времени, конвективное течение воды в пористой среде при  $\alpha \gg 1$  ( $\alpha = 1248$ ) проходит ряд характерных стадий.

Первоначально, возникает нисходящее течение вдоль стенки охлаждающего элемента, затем холодная вода распространяется вдоль дна сосуда, накапливается в его нижней части. В точке соприкосновения дна сосуда с охлаждающим элементом формируется область низких температур, в которой достаточно быстро температура становится ниже температуры максимума

плотности, что приводит к возникновению восходящего потока (рис. 3.3.1*а*). Восходящий поток оттесняет нисходящий конвективный поток от охлаждающего элемента, при этом температурный пограничный слой утолщается, градиенты температуры становятся меньше, теплообмен происходит медленнее. По мере охлаждения воды область, в которой нисходящий поток оттесняется от охлаждающего элемента восходящим потоком, увеличивается, точка соприкосновения потоков поднимается (рис. 3.3.1*б*). Достигнув поверхности, холодная вода, как более легкая, распространяется по ней, занимая верхнюю часть сосуда, оттесняя нисходящий поток вниз до полного его исчезновения (рис. 3.3.1*в*). Течение инвертируется, вдоль охлаждающего элемента формируется восходящий конвективный поток. Такой режим течения сохраняется вплоть до полного охлаждения воды в сосуде (рис. 3.3.1*г*). С течением времени градиенты температур постепенно уменьшаются, течение останавливается.

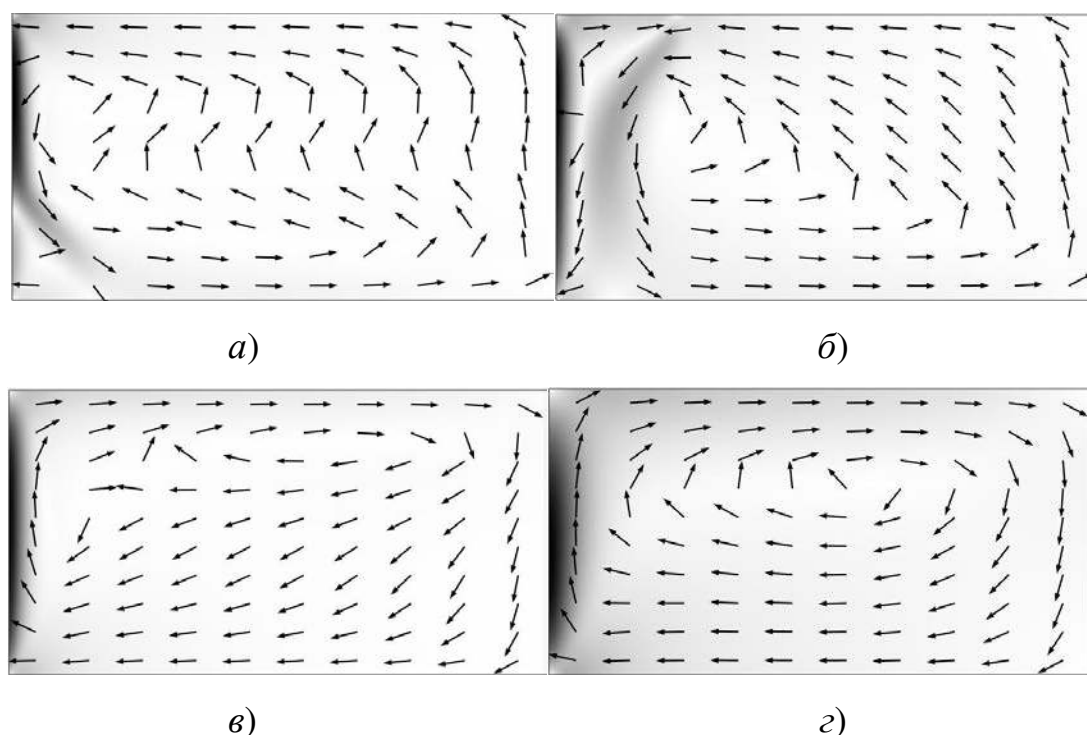
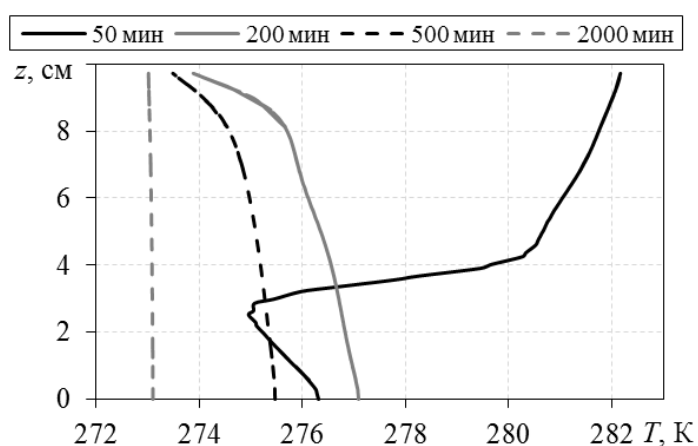
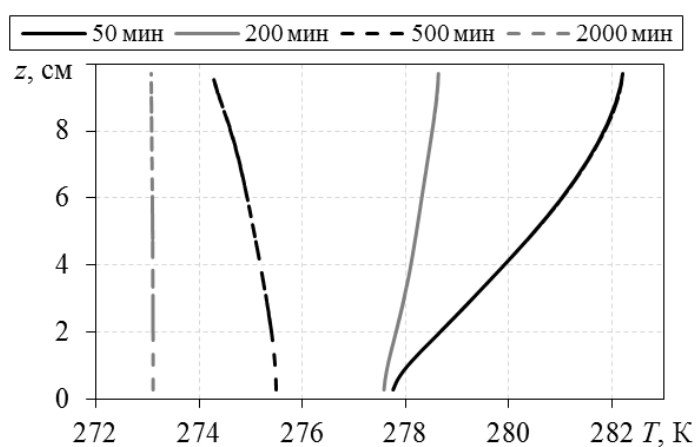


Рисунок 3.3.1. Поле скоростей течения при охлаждении пористой среды при  $\alpha = 1248$  в различные моменты времени при учёте инверсии плотности воды: *а*) 50 мин; *б*) 200 мин; *в*) 500 мин; *г*) 2000 мин

Активный конвективный перенос и перестройка течения приводят к анизотропному распределению температуры по высоте охлаждаемого сосуда. На рисунке 3.3.2 приведены зависимости температуры от высоты, рассчитанные для радиусов 0,025м и 0,05м в те же моменты времени, что и поля скоростей на рисунке 3.3.1.



а)



б)

Рисунок 3.3.2. Зависимости температуры от высоты, рассчитанные для радиусов а) 0,025м и б) 0,05м для времен 50мин; 200мин; 500мин; 2000мин

Температурные распределения с положительным градиентом температуры (вверху теплее) соответствуют нисходящему течению с отрицательным восходящему. Немонотонное изменение возникло вследствие перестройки течения, тогда, когда холодный восходящий поток постепенно отесняет

нисходящий поток от охлаждающего элемента. В близкой к охлаждающему элементу области (рис. 3.3.2а) в верхней части сосуда достаточно быстро температура становится близкой к 0 °С, далее, с течением времени, градиенты уменьшаются за счет постепенного охлаждения придонной области. Дальше от центра (рис. 3.3.1б) сосуда, вблизи его дна достаточно быстро температура достигает значений близких к температуре максимума плотности воды, и длительное время остается неизменной. Дальнейшее понижение температуры в этой области происходит после перестройки течения.

На рисунке 3.3.3 представлены поля скоростей течения при охлаждении пористой среды при  $\alpha = 1248$ , в моменты времени 200 мин и 2000 мин без учёта инверсии плотности воды.

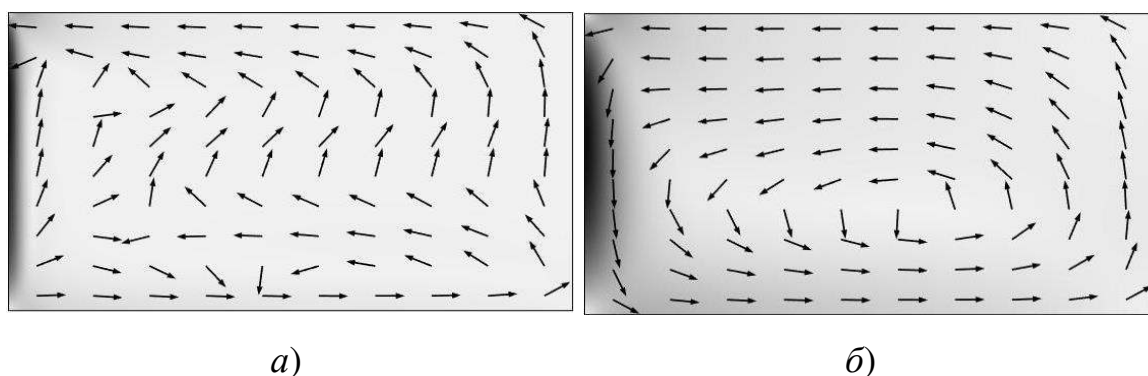


Рисунок 3.3.3. Поля скоростей течения при охлаждении пористой среды при  $\alpha = 1248$ , в различные моменты времени без учёта инверсии плотности воды: а) 200 мин; б) 2000 мин

Видно, что характер конвективного течения упрощается, если не принимать в расчет наличие максимума плотности у воды. В пористой среде возникает нисходящее конвективное течение воды вдоль стенки (границы) охлаждающего элемента, холодная вода распространяется вдоль дна сосуда, накапливается в его нижней части (рис. 3.3.3а). Постепенно в движение вовлекается все жидкость в сосуде и до полного охлаждения пористой среды принципиально картина течения не изменяется (рис. 3.3.3б). С течением времени

пористая среда охлаждается, градиенты температур постепенно уменьшаются, течение останавливается.

### Конвективное течение воды в пористых средах при $\alpha \approx 1$

Расчеты, проведенные при значении параметра  $\alpha=12,48$  для пористой среды проницаемостью  $10^{-7} \text{ м}^2$ , показывают, что в пористой среде при  $\alpha \approx 1$ , картина течения не отличается принципиально от картины конвективного течения в высокопроницаемой пористой среде. Также происходит перестройка течения с нисходящего режима на восходящий.

В отличие от конвективного течения в высокопроницаемых пористых средах, в условиях произведенного численного эксперимента, в моделируемом сосуде длительное время одновременно сохраняются два потока – нисходящий и восходящий (рис. 3.3.4а) Эти потоки имеют вертикальную линию соприкосновения, которая постепенно отодвигается от стенки охлаждающего элемента до границы области (рис. 3.3.4б). Затем устанавливается режим с восходящим вдоль охлаждающего элемента течением

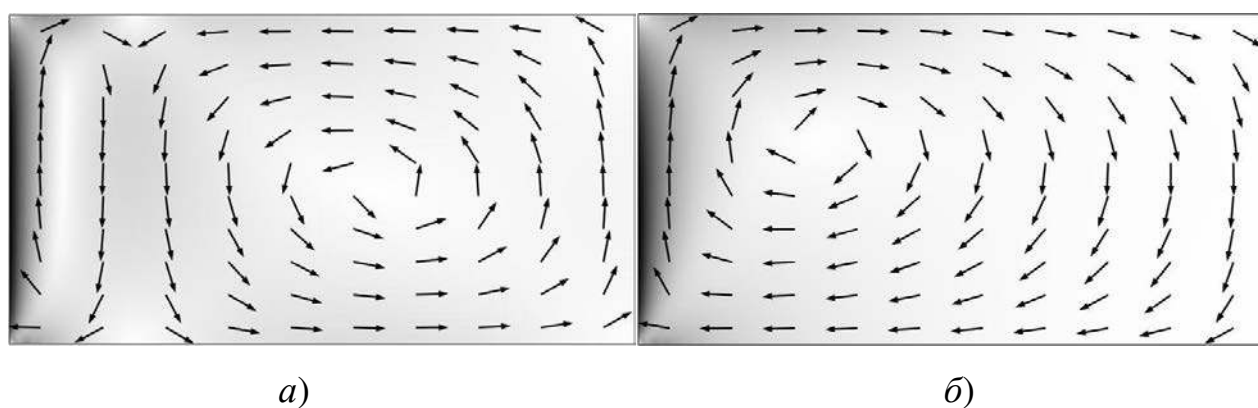


Рисунок 3.3.4. Поля скоростей течения при охлаждении пористой среды при  $\alpha = 12.48$  в различные моменты времени при учёте инверсии плотности воды: а) 1000 мин; б) 2000 мин



Для оценки влияния наличия максимума плотности воды на процесс охлаждения пористой среды выполнены расчеты, в которых не учитывалось наличие максимума плотности у воды. Картина течения в этом случае ничем принципиально не отличается от течения, показанного на рисунке 3.3.4. В пористой среде образуется нисходящий вдоль охлаждающего элемента поток, постепенно затухающий по мере охлаждения среды.

### Конвективное течение воды в пористых средах при $\alpha \ll 1$

При малых значениях  $\alpha = 0,0001248$  (проницаемость пористой среды  $k=10^{-12} \text{ м}^2$ ) теплоперенос обусловлен в основном теплофизическими свойствами пористой среды и воды. Из-за этого конвективное течение становится симметричным относительно горизонтальной линии проведенной на половине высоты сосуда. Изменение температуры по вертикали не происходит. Но общий характер течения аналогичен описанным выше случаям: течение меняет направление около охлаждающего элемента, в пористой среде одновременно существуют как восходящее, так и нисходящее течение с вертикальной линией соприкосновения потоков, которая медленно движется к внешней границе расчетной области (рис. 3.3.5).

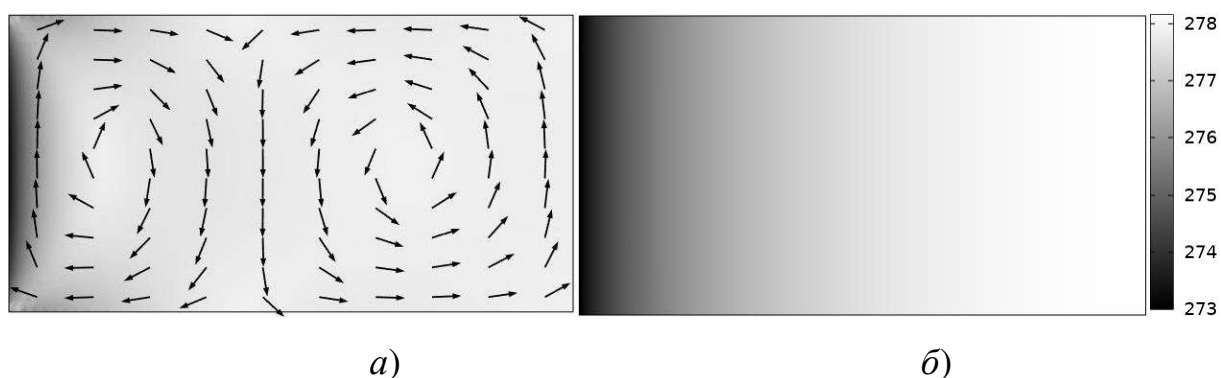


Рисунок 3.3.5. Поле скоростей течения и температуры при охлаждении пористой среды при учёте инверсии плотности воды при  $\alpha=0,0001248$  в момент времени 2000 мин

Если не учитывать наличие у воды максимума плотности, то возникающее при этом конвективное течение, также как и описанных выше случаях нисходящее у охлаждающего элемента, но полностью симметрично относительно центральной горизонтальной линии.

### 3.4 Результаты численного моделирования

Для оценки влияния максимума плотности воды на скорость охлаждения водонасыщенной пористой среды рассчитывались зависимости средней температуры в расчетной области от времени для трех описанных выше случаев.

На рисунок 3.4.1. приведены данные расчета при  $\alpha = 1248$  для трёх вариантов: когда инверсия плотности воды учитывается, инверсия плотности не учитывается, движение воды в пористой среде не учитывается.

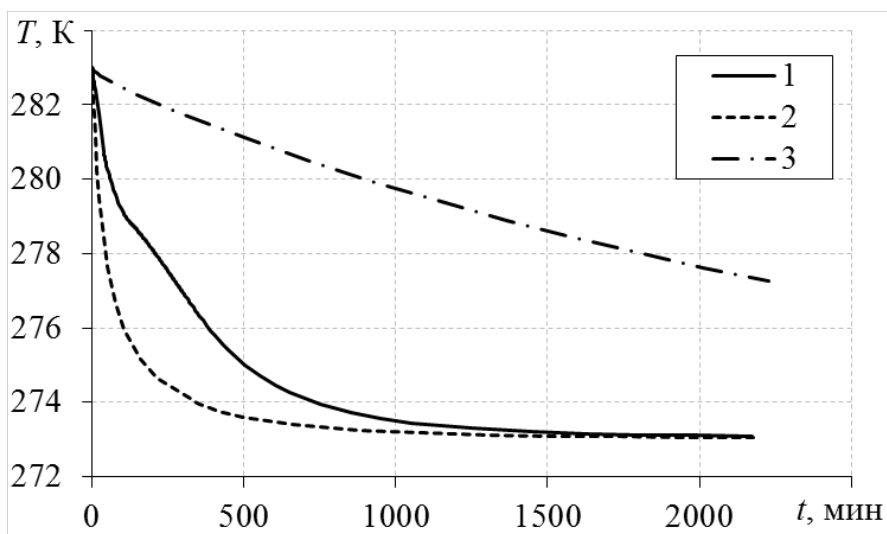


Рисунок 3.4.1. Зависимость средней температуры охлаждаемой пористой среды от времени при  $\alpha = 1248$ , где 1 – при учёте инверсии плотности воды; 2 – без учёта инверсии плотности воды; 3 – конвективный перенос отсутствует

В пористых средах при  $\alpha \gg 1$  роль конвективного переноса в теплообменных процессах велика, именно фильтрационное движение жидкости охлаждает пористую среду. Следует отметить, что средняя температура

изменяется не монотонно, что связано с перестройкой режимов течения. Расчеты, проведенные для воды без учета наличия у нее максимума плотности, показывают, что в этом случае скорость остывания системы еще выше – пористая среда остывает в три раза быстрее.

На рисунке 3.4.2 зависимость средней температуры охлаждаемой пористой среды от времени при  $\alpha = 12,48$  для трёх вариантов расчётов, аналогичных как для  $\alpha = 1248$ .

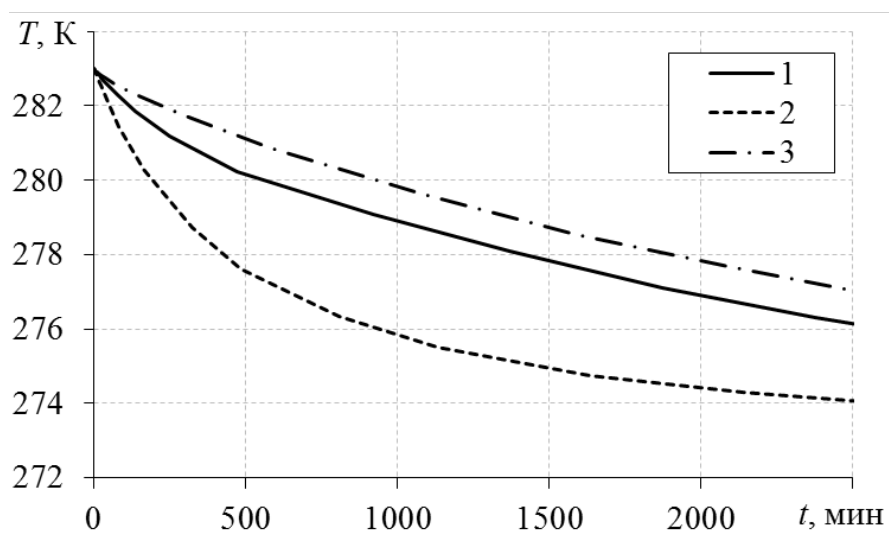


Рисунок 3.4.2. Зависимость средней температуры охлаждаемой пористой среды от времени при  $\alpha = 12,48$ , где 1 – при учёте инверсии плотности воды; 2 – без учёта инверсии плотности воды; 3 – конвективный перенос отсутствует

В пористых средах при  $\alpha \approx 1$ , при учёте наличия максимума плотности у воды охлаждение системы происходит значительно медленнее, инверсия течения приводит к тому, что роль конвективного переноса уменьшается, средняя температура меньше отличается от температуры, полученной без учета конвективного течения, чем от температуры из расчета, проведенного без учета наличия максимума плотности у воды. Простой теплофизический расчёт, проведенный без учета гидродинамической составляющей благодаря наличию максимума плотности воды, будет значительно точнее, чем расчет с учётом конвективного переноса с применением упрощенной модели воды.

На рисунке 3.4.3 приведена зависимость средней температуры охлаждаемой пористой среды от времени при  $\alpha = 0,0001248$  для трёх вариантов расчёта.

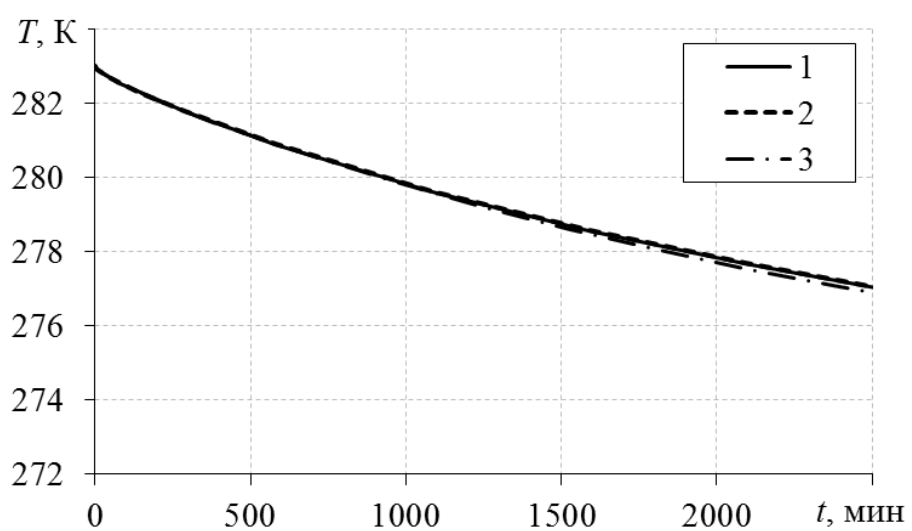


Рисунок 3.4.3. Зависимость средней температуры охлаждаемой пористой среды от времени при  $\alpha = 0,0001248$ , где 1 – при учёте инверсии плотности воды; 2 – без учёта инверсии плотности воды; 3 – конвективный перенос отсутствует

Рисунок показывает, что при малых значениях альфа (проницаемость  $10^{-12} \text{ м}^2$ ) для трёх вариантов расчета кривые практически совпадают, влияние конвективного переноса на процесс охлаждения невелико.

Для анализа зависимости скорости охлаждения от проницаемости (при изменении проницаемости изменяется и параметр  $\alpha$ ), по зависимостям средней температуры от времени, вычислена скорость охлаждения, когда средняя температура в объёме равна температуре максимума плотности воды, для различных значений параметра  $\alpha$  (рис. 3.4.2). Результаты сравниваются с расчетами, в которых инверсия плотности не учитывается. Скорость охлаждения пористой среды и безразмерный параметр определяются из выражений:

$$\xi_i = \frac{\partial T_{avr i}(t)}{\partial t},$$

$$\gamma_i = \frac{\xi_i}{\xi_3},$$

где  $T_{avr i}$  – средняя температура во всём объёме;  $\xi_i$  – скорость изменения температуры;  $i = 1, 2$  и  $3$  соответствуют случаям: максимум плотности воды учитывается, максимум плотности воды не учитывается, без учёта конвекции. Зависимость безразмерного параметра  $\gamma_i$  от параметра  $\alpha$  представлена на рисунке 3.4.2. Данные представлены в логарифмическом масштабе.

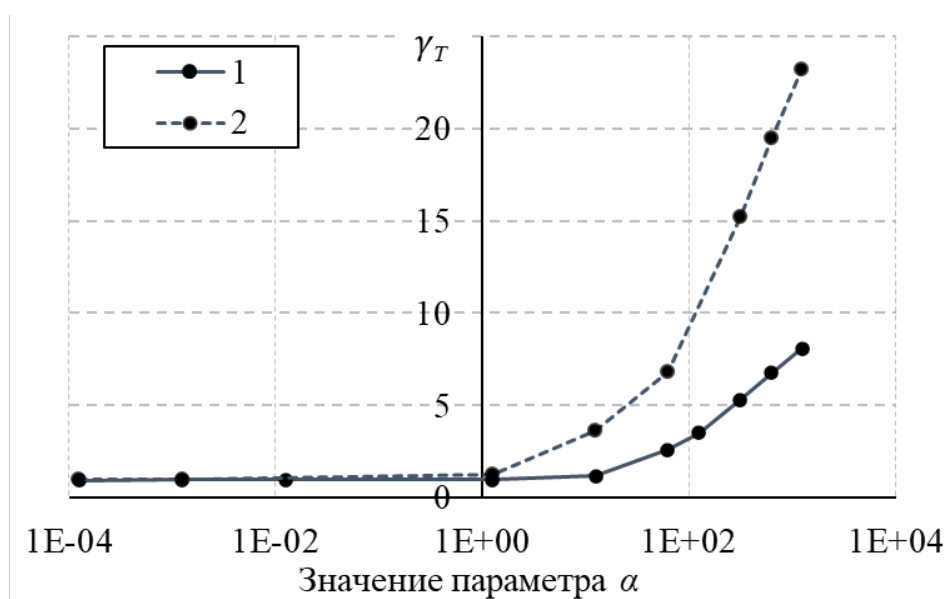


Рисунок 3.4.2. Зависимость средней скорости охлаждения пористой среды от параметра  $\alpha$  (проницаемости):

1 – максимум плотности воды учитывается; 2 – максимума плотности воды не учитывается

Из рисунка 3.4.2 видно, что при  $\alpha < 1$  скорости охлаждения слабо различаются для случаев 1 и 2. При значениях  $\alpha \approx 1$ , приближения, в которых не учитывается наличие максимума плотности воды, будут давать ошибочные результаты. Из-за перестройки течения конвекция начинает играть решающую роль в охлаждении системы только тогда, когда  $\alpha$  становится больше 10. В высокопроницаемых пористых средах, скорости охлаждения системы в решениях при учёте инверсии плотности воды и без учёта его наличия

пропорциональны и одинаково зависят от параметра  $\alpha$ . Это связано с тем, что перестройка течения замедляет конвективный теплообмен, за время замедления система охлаждается за счёт кондуктивного переноса, затем устанавливается восходящее течение. В условиях принятой модели, для переноса тепла от пористой среды к охлаждающему элементу неважно направление течения, а в связи с тем, что градиенты температуры при учете наличия максимума плотности воды меньше, скорость охлаждения в этом случае тоже меньше. Приведенные данные подтверждают роль параметра  $\alpha$  в оценке режимов конвективного течения в пористой среде, но наличие максимума плотности у воды приводит к тому, что конвекция начинает играть решающую роль при более высокой проницаемости. Оценивая параметр  $\alpha$ , можно дать рекомендации по учёту конвективных течений при проектировании и строительстве заданий и сооружений.

### 3.5 Заключение по главе 3

При рассмотрении задач тепломассопереноса в пористых средах необходимо принять решение в каком приближении и с использованием какой модели делать расчёт. Как показывает наш численный эксперимент ошибки расчета могут быть очень большими, так в высокопроницаемых пористых средах при  $\alpha \gg 1$ , система остывает в 10 раз быстрее если учитывать конвективный теплоперенос. Если же в расчётах не учитывать наличие максимума плотности воды, то время охлаждения системы будет занижено в четыре раза.

С другой стороны, выполненные расчеты показывают, что в пористых средах при  $\alpha \ll 1$ , можно не учитывать конвективное движение и использовать простые модели, но если речь идет не о решении тепловой задачи, а, к примеру, задачи распространения какой-либо примеси, то игнорирование явления инверсии плотности воды не позволит получить правильный результат.

Наличие максимума плотности у воды в задачах с градиентами температур в зоне нулевых температур приводит к перестройке конвективного течения, в рассматриваемом случае нисходящее течение замедляет свою интенсивность, и возникают восходящие потоки холодной воды. Уменьшение интенсивности конвективных потоков в момент перестройки течения замедляет темп охлаждения системы.

Из приведенных данных следует, что при выборе методики решения задач тепломассопереноса в водонасыщенных пористых средах вблизи нулевых температур необходимо оценить характерные параметры системы и рассчитать параметр  $\alpha$ . В случае если этот параметр меньше единицы, возможно провести расчет без учета конвективных потоков. В других случаях необходим расчет с учетом конвекции и обязательным использованием модели воды учитывающей наличие максимума плотности. Не учет этой особенности строения воды будет приводить к кратным (в 3-4 раза) ошибкам определения интегральных параметров.

## **ГЛАВА 4. ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВОДА-ЛЁД**

Моделирование фазового перехода в пористых средах сложная математическая задача, с которой часто сталкиваются на практике. При моделировании процесса кристаллизации воды необходимо учитывать перенос тепла и массы, теплофизические, механические и петрофизические свойства пористой среды, свойства флюида и их изменение в зависимости от температуры и давления. Для моделирования данного процесса требуется учёт многих параметров, в частности конвективного движения незамёрзшей воды. Свободные конвективные токи в пористой среде, влияют на процесс фазового перехода при её промерзании, но в некоторых случаях влиянием этого явления можно пренебречь. Это требует исследования механизмов и степени влияния свободной конвекции на промерзание водонасыщенной пористой среды.

В продолжении цикла исследований, в данной главе представлено численное решение многопараметрической задачи кристаллизации воды в пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей конвективные течения, зависимость теплофизических параметров воды и пористой среды от температуры. Настоящая многопараметрическая задача также численно решается с использованием известного программного продукта.

### **4.1 Математическая модель**

Для описания процессов тепломассопереноса при замораживании/оттаивании льда в пористой среде приняты следующие дополнительные допущения: фазовый переход происходит в равновесном



режиме (кинетика процесса не рассматривается); лёд несжимаем и неподвижен; теплофизические свойства льда константы. Зависимости динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности и поверхностного натяжения воды от температуры, а также зависимости плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры принимаются такими же как в предыдущих задачах. В реальных условиях в воде могут содержаться соли, газ или частицы примесей, но для изучения структуры течения в данной работе пренебрегаем солёностью воды и наличием в ней каких-либо примесей. Также считаем, что удельная теплота плавления льда является константой.

Модель включает систему известных уравнений в рамках принятых допущений: уравнения баланса массы для подвижной жидкой фазы (воды) и неподвижной твёрдой фазы (льда), линейный закон фильтрации Дарси, уравнение баланса энергии, и учитывает зависимость параметров воды и пористой среды от температуры:

$$\frac{\partial(mS_w\rho_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (mS_w\rho_w\vec{v}_w) = -J_i, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial(mS_i\rho_i)}{\partial t} = J_i, \quad (4.1.2)$$

$$S_w + S_i = 1, \quad (4.1.3)$$

$$mS_w\vec{v}_w = -\frac{k_w}{\mu}(\nabla p - \rho_w\vec{g}), \quad (4.1.4)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + mS_w\rho_w c_w \vec{v}_w \cdot \nabla T - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = m\rho_i L_i \frac{\partial S_i}{\partial t}, \quad (4.1.5)$$

где  $\vec{v}_w$  – скорость воды (м/с);  $\rho_w(T)$  – плотность воды (кг/м<sup>3</sup>), зависящая от температуры;  $\rho_i$  – плотность льда (кг/м<sup>3</sup>);  $S_w$  и  $S_i$  – насыщенность пористой среды водой и льдом, соответственно;  $J_i$  – интенсивность льдообразования (кг/(м<sup>3</sup>·с));  $k_w = k k_{rw}$  – коэффициент проницаемости пористой среды для воды (м<sup>2</sup>);  $k_{rw}$  – относительная фазовая проницаемость воды;  $\mu(T)$  – динамическая вязкость воды (Па·с);  $p$  – давление (Па);  $\lambda(T) = (1 - m)\lambda_s(T) + m(S_w\lambda_w(T) +$

$S_i \lambda_i(T)$  – коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды (Вт/(м·К));  $\lambda_i(T)$  – коэффициент теплопроводности льда (Вт/(м·К));  $\rho c(T) = (1 - m)\rho_s(T)c_s(T) + m(S_w\rho_w(T)c_w(T) + S_i\rho_i c_i(T))$  – объёмная теплоёмкость насыщенной пористой среды (Дж/(м<sup>3</sup>·К));  $c_i(T)$  – теплоёмкость льда (Дж/(кг·К));  $L_i$  – удельная теплота плавления льда (Дж/кг).

В грунте некоторое количество воды удерживается в мелких и тупиковых порах, в узких местах контактов зерен, не участвующих в фильтрации жидкостей, а также в виде неподвижных местных пленок и микрокапель располагающихся на поверхности породы. Эта часть воды является неподвижной фазой. При охлаждении количество незамёрзшей воды убывает с понижением температуры и остаётся незамёрзшей вплоть до температуры -70 °С [57]. Согласно экспериментальным данным, каждому типу грунта соответствует своя кривая содержания незамёрзшей воды, которая зависит от дисперсности скелета пористой среды и от начальной засоленности [58]. Предполагаем, что фазовый переход «вода-лёд» в песчаном грунте начинается при 0 °С (273,15 К), согласно опытным данным [58] вода интенсивно замерзает до -1,5 °С, далее остаточная водонасыщенность не меняется, следовательно принимаем начало фазового перехода 0 °С (273,15 К), окончание фазового перехода -1,5 °С, остаточную водонасыщенность 1% (рис. 4.1.1).

Несмотря на то, что при фазовом переходе могут возникать большие давления в пористой среде, считаем, что пористая среда не деформируемая, так как цель нашего исследования – изучение структуры течения в пористой среде, а не деформация пористой среды.

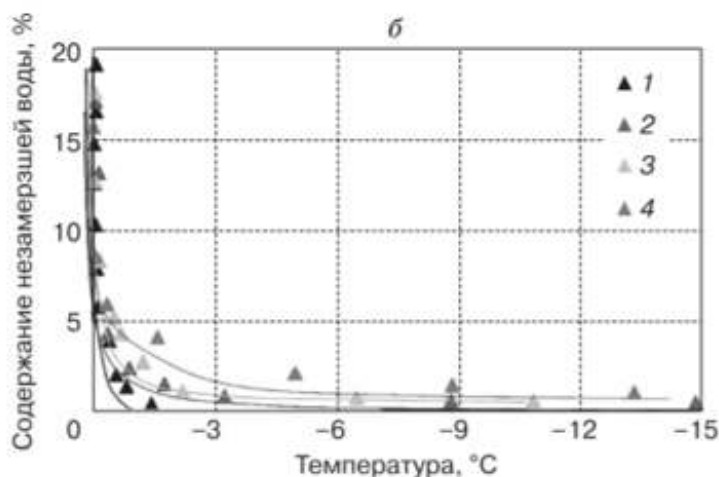


Рисунок 4.1.1. Зависимость содержания незамерзшей воды от температуры. Песчаный грунт с различным содержанием каолинистой глины (1 – песок; 2 – песок+15% глины; 3 – песок+25% глины; 3 – песок+40% глины)

[58]

При замораживании-оттаивании пористой среды меняется проницаемость для воды, поэтому для корректного описания модели требуется зависимость проницаемости для воды от водонасыщенности. Примем зависимость фазовой проницаемости пористой среды для воды от водонасыщенности в виде:

$$k_w = k(S_w)^{3,5}. \quad (4.1.6)$$

Для моделирования принималось, что кристаллизация воды в пористой среде гетерогенная [9] и время индукции (время необходимое для кристаллизации) пренебрежимо мало в сравнении с характерными временами задачи.

#### 4.2 Оценка характерных времён

Пусть в неограниченном горизонтальном слое пористой среды постоянной толщины  $h$  и температуры  $T_0$ , расположен вертикальный охлаждающий элемент, радиуса  $r_s$ . Оценим скорость распространения температурных возмущений от охлаждающего элемента в пористой среде. Радиус тепловой волны определим из предложенной в работе [6] формулы:

$$R_{\tau} = \sqrt{r_s^2 + 4\chi\tau_{\chi}}, \quad (4.2.1)$$

где  $R_{\tau}$  – радиус тепловой волны (м);  $\tau_{\chi}$  – время распространения тепловой волны (с).

Время достижения тепловой волной наружной стенки сосуда:

$$\tau_{\chi} = \frac{R_{\tau}^2 - r_s^2}{4\chi} = \frac{R_{\tau}^2}{4\chi} \left(1 - \frac{r_s^2}{R_{\tau}^2}\right).$$

Так как,  $\frac{r_s^2}{R_{\tau}^2} = \frac{0,01^2}{0,5^2} = 0,0004 \ll 1$ , можно пренебречь слагаемым  $\frac{r_s^2}{R_{\tau}^2}$  и:

$$\tau_{\chi} = \frac{R_{\tau}^2}{4\chi} \quad (4.2.2)$$

Согласно [45] коэффициент температуропроводности  $\chi \approx 2 \cdot 10^{-7}$ , тогда характерное время, за которое тепловая волна достигнет внешней границы моделируемой области:

$$\tau_{\chi} = \frac{0,5^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-7}} = 3,125 \cdot 10^5 \quad (4.2.3)$$

В условиях моделирования, скорость охлаждения принята  $v_{cool} = \frac{T_{in} - T_{min}}{\tau_{cool}}$ ,

где  $\tau_{cool} = 10^8$ с, то есть  $v_{cool} = \frac{T_{in} - T_{min}}{\tau_{cool}} = \frac{277,13 - 262,13}{10^8} = 1,5 \cdot 10^{-7} \left(\frac{K}{c}\right)$ .

Следовательно, за время  $\tau_{\chi}$  температура на охлаждающем элементе изменится на  $\Delta T = \tau_{\chi} v_{cool} = 3,125 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-7} = 0,0469$  К.

Необходимо сравнить это изменение температуры с диапазоном температур, в которых происходит фазовый переход. Согласно [58], это 1,5 К, а так как  $\Delta T \ll 1,5$  К, то можем считать тепловую и гидродинамическую задачи стационарными в каждый момент времени. Следует отметить, что медленное охлаждение – это вычислительный приём, который позволяет экономить вычислительные мощности.

### 4.3 Численное моделирование фазового перехода вода-лёд

Численное моделирование проводилось в цилиндрической пористой среде радиусом  $R = 0,5\text{ м}$ , высотой  $h = 0,1\text{ м}$ , в центре которой вертикально расположен вертикальный охлаждающий элемент радиусом  $r_s = 0,01\text{ м}$  (рис. 3.1.1).  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения ( $\text{м/с}^2$ ), направлен противоположно оси  $z$ .

Конвективное течение наиболее интенсивно около охлаждающего стержня. Охлажденная вода движется вдоль охлаждающего элемента затем вдоль горизонтальной стенки моделируемой области от охлаждающего элемента, вдоль другой горизонтальной стенки "теплая", еще не охлажденная вода, движется к охлаждающему элементу, что приводит к неравномерности распределения температуры по вертикальной координате. За счёт кондуктивного теплопереноса по вертикали, с удалением от оси, эта неравномерность постепенно сглаживается. В численном эксперименте в [45] было показано, что на расстоянии большем, чем  $R > 2h$  нет градиента температуры по координате  $z$ , следовательно в расчетах можно было ограничиться  $R = 2h$ , но для наглядности представления конвективного движения и фазового перехода в данном исследовании решено принять  $R = 5h$ .

Предполагаем, что также как в случае конвективного течения в пористой среде [45], в данной задаче течение будет определяться безразмерным соотношением физических параметров. В главе 3 предложен безразмерный параметр  $\alpha$  (3.2.4).

Пористая среда насыщена водой. Начальная температура воды и пористой среды принималась равной  $277,13\text{ К}$  ( $3,98\text{ °С}$ ), то есть температуре, при которой плотность воды максимальна. Температура на охлаждающем элементе линейно уменьшалась с  $277,13\text{ К}$  до  $262,13\text{ К}$  за время  $10^8\text{ с}$ . Температура на внешней границе поддерживалась равной  $277,13\text{ К}$  ( $3,98\text{ °С}$ ). Верхняя и нижняя границы непроницаемы для тепла и вещества. Температура и давление на внешней границе цилиндра заданы постоянными и равными начальным. В нулевой момент времени скорость движения воды в пористой среде равняется нулю.

Численное моделирование производилось методом конечных объемов с использованием вычислительного пакета OpenFOAM [11]. Радиальная симметрия данной задачи позволяет провести расчёты в двумерной осесимметричной постановке (рис. 3.1.1). Расчёты проводились на прямоугольной сетке, состоящей из 4936 элементов, размер расчётной области 0,1x0,4 м. Средняя площадь одной ячейки  $8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ . Проверка сходимости выполнена по методике, описанной в [47].

Пористость пористой среды принималась  $m = 0,4764$ , что соответствует кубическому типу упаковки пористой среды, состоящей из сферических частиц [26].

Для описания зависимости плотности, теплоемкости и теплопроводности воды и скелета пористой среды от температуры использовались полиномиальные интерполяции (2.1.4). В таблицах 2.1.1 и 3.1.1 приведены значения полиномиальных коэффициентов для воды и для скелета пористой среды соответственно. Для теплоёмкости и теплопроводности льда использованы следующие интерполяционные зависимости:

$$c_i = 6,6701T + 251,54 \quad (4.3.1)$$

$$\lambda_i = -0,013T + 5,6821 \quad (4.3.2)$$

При достижении на охлаждающем элементе температуры фазового перехода в пористой среде вокруг него образуется лёд, при этом тепло от внешней поверхности подводится к области фазового перехода за счёт теплопроводности пористой среды и сформировавшиеся конвективных потоков. Соотношение конвективного и кондуктивного теплопереноса определяют объём образовавшегося льда и форму фронта фазового перехода.

В условиях численного эксперимента температура на внешней поверхности моделируемой области поддерживалась равной температуре, при которой плотность воды максимальна, поэтому, если учитывать в расчетах явление максимума плотности воды, в пористой среде образуется один вихрь с восходящим течением вдоль границы области фазового перехода и с

нисходящим у внешней стенки. Если не учитывать максимум плотности воды, то возникает один вихрь, но направление конвективного течения противоположное, при этом вода поднимается вверх у внешней стенки и опускается вдоль границы области фазового перехода, то есть тёплая вода движется в верхней части области.

На рисунках 4.3.1а и 4.3.1б представлены поля скоростей в расчетной области при минимальной в численном эксперименте температуре охлаждающего элемента ( $T=261,98^{\circ}\text{K}$ ) при учёте инверсии плотности воды (рис. 4.3.1а) и без учёта инверсии плотности воды (рис. 4.3.1б) (стрелками указаны направления поля скорости).

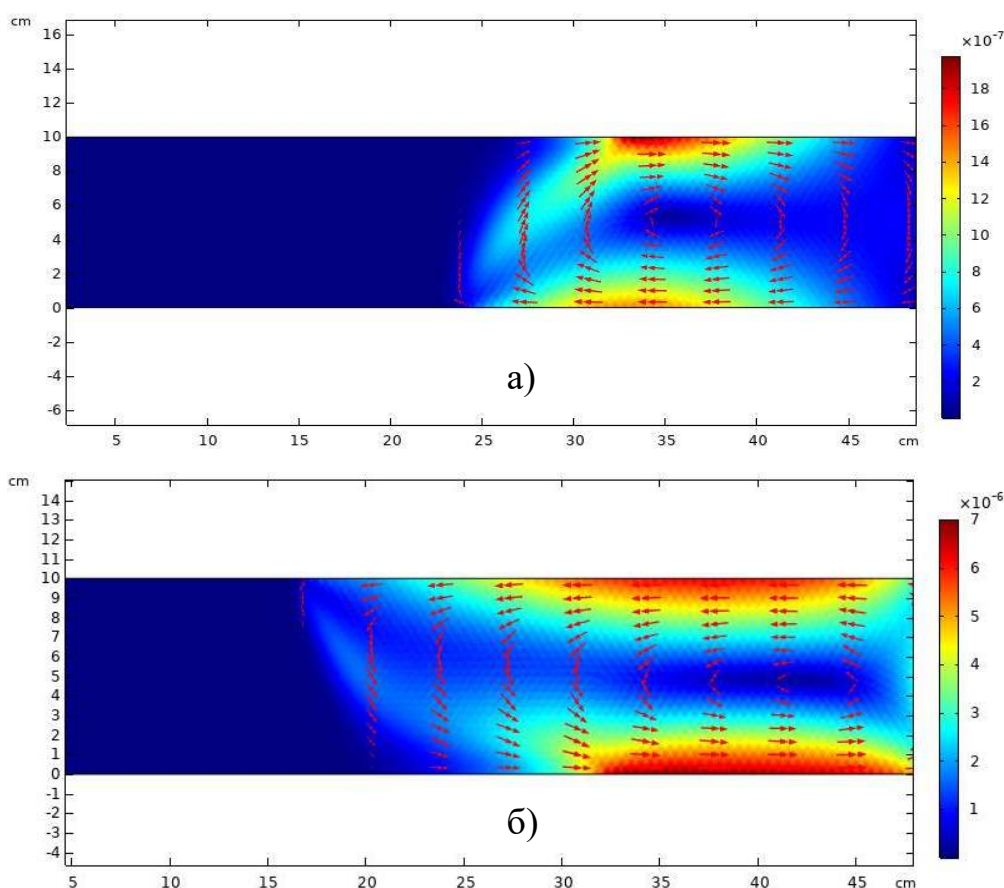


Рисунок 4.3.1. Распределение скоростей свободного конвективного течения в пористой среде ( $\alpha = 1,25$ ) в сечении  $(z, r)$  при минимальной температуре охлаждающего элемента: а) максимум плотности воды учитывается; б) максимум плотности воды не учитывается

Возникшее конвективное течение определяет распределения температуры и скорости по вертикальной координате. На рисунках 4.3.2 и 4.3.3 представлены профили радиальной скорости и температуры в сечении  $R/2$ .

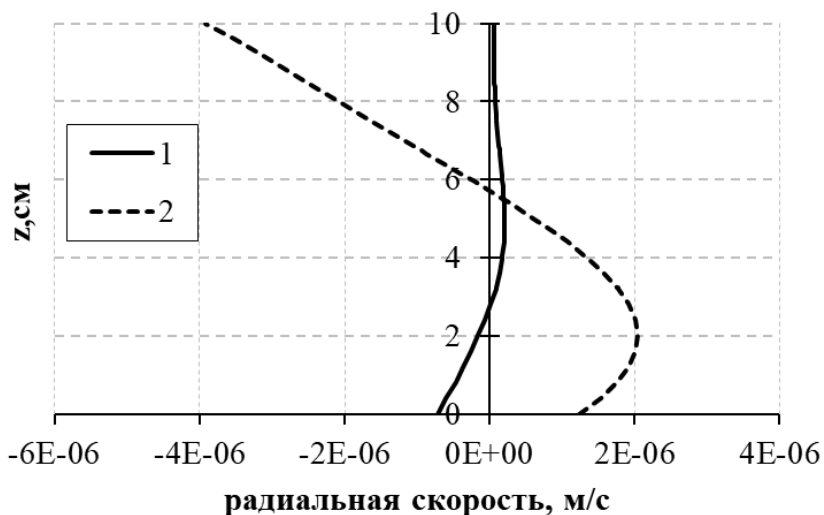


Рисунок 4.3.2. Профили радиальной скорости конвективного течения по вертикальной координате, в сечении  $R/2$  ( $r = 0,25\text{ м}$ ,  $\alpha = 1,25$ ), где 1 – максимум плотности воды учитывается; 2 – максимум плотности воды не учитывается

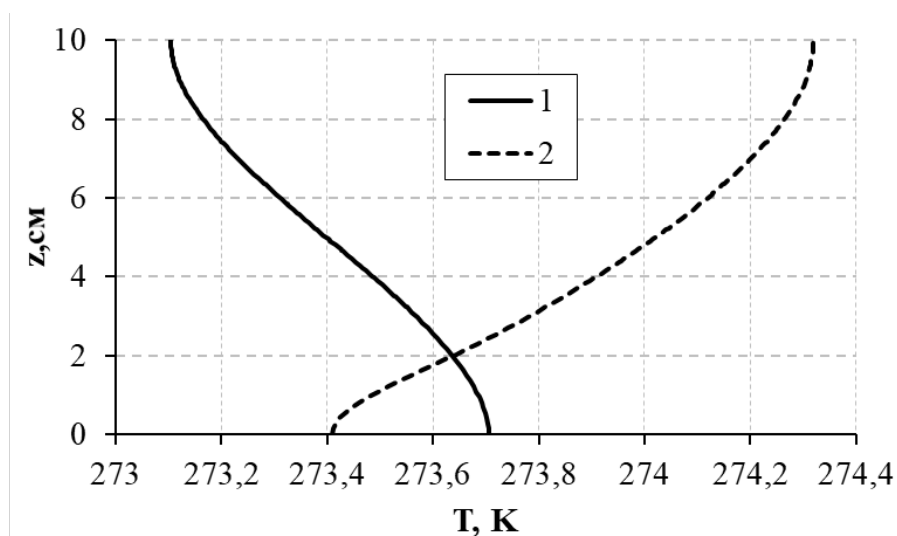


Рисунок 4.3.3. Профили температуры по вертикальной координате, в сечении  $R/2$  ( $r = 0,25\text{ м}$ ,  $\alpha = 1,25$ ), где 1 – максимум плотности воды учитывается; 2 – максимум плотности воды не учитывается



Теплая, более тяжелая вода фильтруется в нижней части цилиндра, достигает линии фазового перехода и, охлаждаясь, поднимается вверх, вследствие чего в верхней части цилиндра образование льда происходит более интенсивно, что приводит к изгибу фронта фазового перехода (рис. 4.3.4). Если в моделировании не учитывать максимум плотности воды, то направление конвективного течения изменяется (рис. 4.3.1б), тёплая вода движется в верхней части расчетной области, вследствие чего изменяются профили радиальных скоростей (рис. 4.3.2), профили температуры (рис. 4.3.3) и кривизна области фазового перехода (рис. 4.3.4б).

На рисунках 4.3.4а и 4.3.4б представлены поля водонасыщенности в пористой среде для конечного момента времени расчёта для случаев с учётом и без учёта максимума плотности воды.

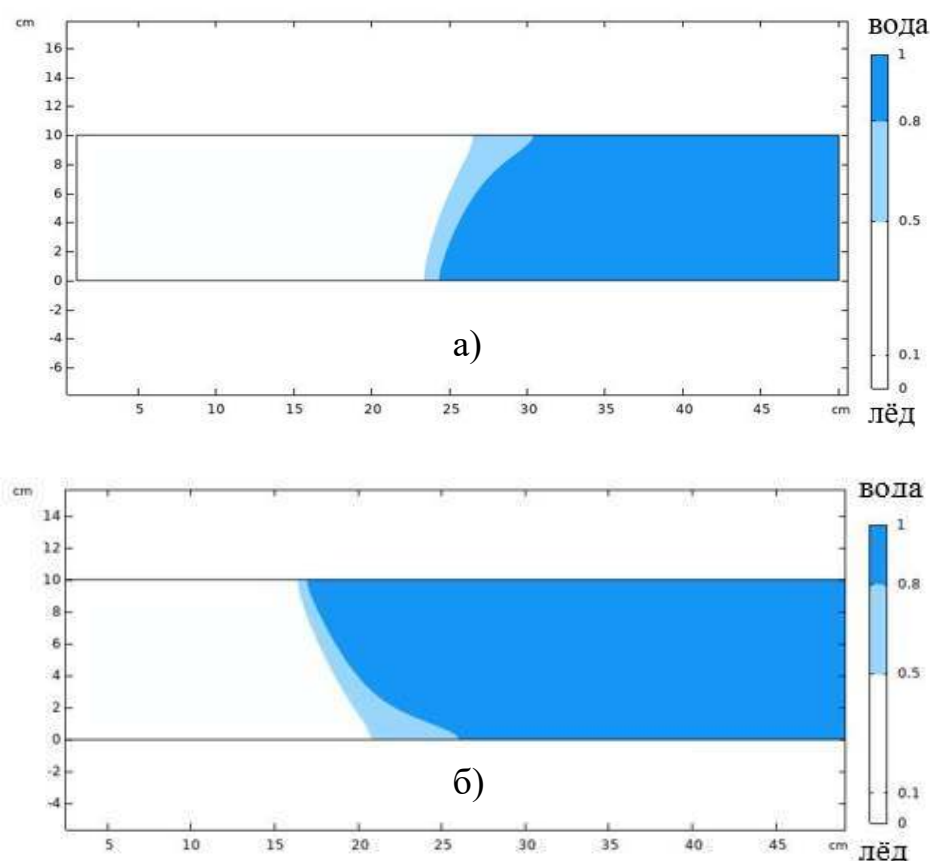


Рисунок 4.3.4. Поля водонасыщенности в пористой среде ( $\alpha = 1,25$ ) в сечении  $(z,r)$  при минимальной температуре охлаждаемого элемента:  
а) максимум плотности воды учитывается; б) максимум плотности воды не учитывается

Из рисунка 4.3.4 видно существенное отличие кривизны линии фазового перехода для случаев учёта и без учёта максимума плотности воды. Такое качественное отличие можно объяснить различными конвективными потоками в пористой среде.

На рисунке 4.3.5. представлены поля водонасыщенности при минимальной в численном эксперименте температуре охлаждающего элемента ( $T=261,98^{\circ}\text{K}$ ) без учёта конвективного течения.

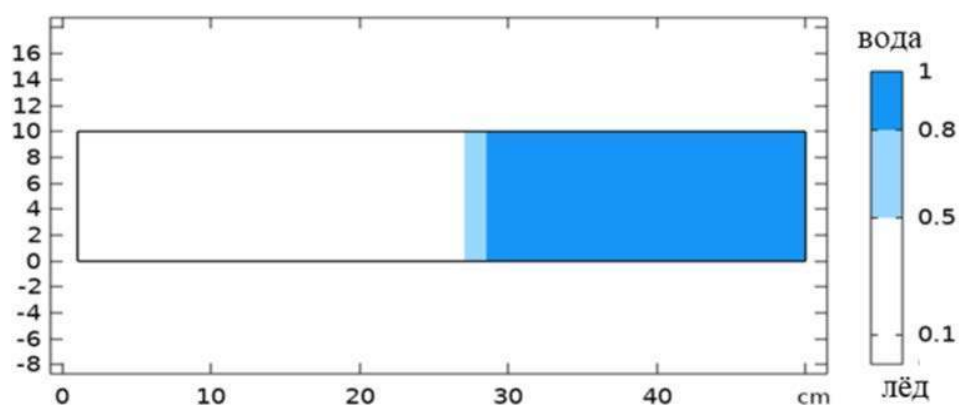


Рисунок 4.3.5. Поля водонасыщенности в пористой среде ( $\alpha = 1,25$ ) в сечении  $(z,r)$  при минимальной температуре охлаждаемого элемента без учёта конвективного течения.

Если в расчётах не учитывать конвективное течение, то линия фазового перехода будет иметь вертикальную границу.

На рисунке 4.3.6 представлена зависимость доли объёма пористой среды, занятая льдом, от температуры охлаждающего элемента для трёх численных моделей воды. Если в расчётах не учитывать максимум плотности воды, доля объёма пористой среды, которая занята льдом, меньше. Это связано с тем, что учёт инверсии плотности воды уменьшает роль конвективного теплопереноса в охлаждении исследуемого объёма.

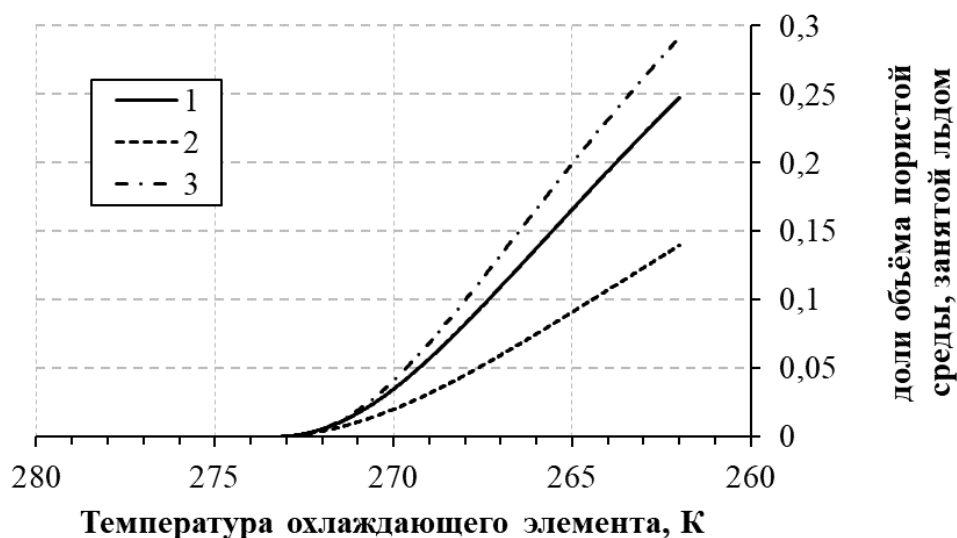


Рисунок 4.3.6. Зависимость доли объема пористой среды ( $\alpha = 1,25$ ), занятой льдом, от температуры охлаждающего элемента: 1 – максимум плотности воды учитывается; 2 – максимум плотности воды не учитывается; 3 – без учёта конвективного движения

На рисунке 4.3.7 приведена зависимость доли объема пористой среды, занятой льдом от проницаемости, расчеты выполнены для трёх моделей воды.

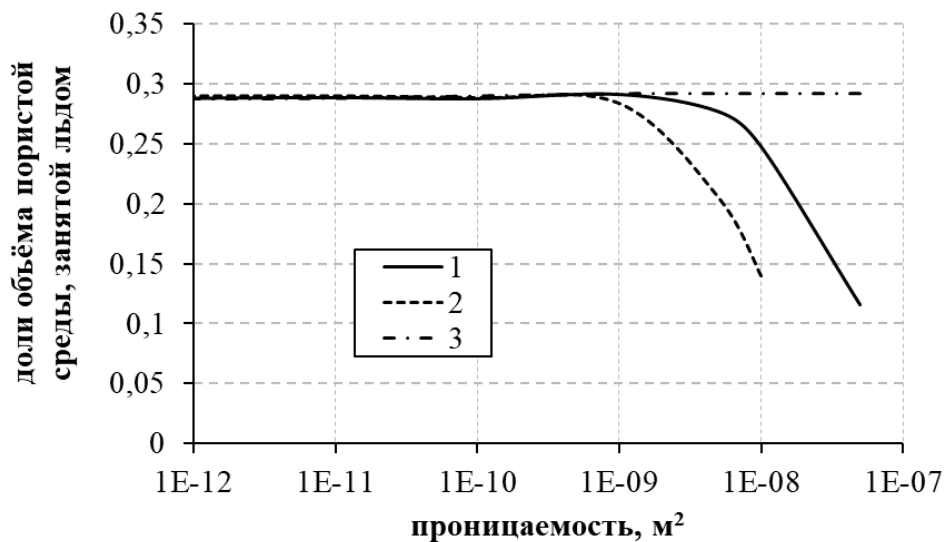


Рисунок 4.3.7. Зависимость доли объема пористой среды, занятая льдом, в зависимости от проницаемости, где 1 – максимум плотности воды учитывается; 2 – максимум плотности воды не учитывается; 3 – без учёта конвективного движения

Из рисунка 4.3.7 видно, что с понижением проницаемости пористой среды пространственная неоднородность фронта фазового перехода выравнивается, роль конвективного теплопереноса уменьшается, что подтверждает выводы о применимости оценочного параметра сделанные в [45]. При низкой проницаемости объём образовавшегося льда не зависит от фильтрационных свойств среды и конвективного течения в ней, так лимитируется уже теплопроводностью. Так как учёт максимума плотности воды приводит к уменьшению интенсивности конвективного потока, то выполаживание фронта фазового перехода происходит при более высоких проницаемостях, независимость объёма образовавшегося льда в пористой среде от её фильтрационных свойств проявляется раньше. Таким образом, при высоких проницаемостях необходимо учитывать инверсию плотности воды, так она существенным образом влияет на конвективные потоки и степень промерзания пористой среды.

#### **4.4 Заключение по главе 4**

Наличие максимума плотности воды существенным образом влияет на процесс промерзания насыщенных водой пористых сред и, в определенных случаях, применение моделей воды в научных и инженерных расчетах, не описывающих её максимум плотности, может привести к значительным ошибкам. Действительно, течение вблизи области фазового перехода не может быть рассчитано с использованием модели воды без учета максимума её плотности. В природе вдоль вертикальной линии фазового перехода всегда формируется восходящий конвективный поток, в то время как расчеты без учета инверсии плотности зададут нисходящий конвективный поток. Это имеет принципиальное значение для целого ряда задач, к примеру, в расчетах переноса примесей.

Расчеты с использованием модели воды без максимума плотности завышают роль конвективного теплопереноса, завышают объемы тепла, переносимого флюидом, что значительно искажает степень промерзания пористой среды. Наличие у воды максимума её плотности приводит к уменьшению роли конвективного теплопереноса, что делает возможным не учитывать конвекцию в решении задач с фазовым переходом лед-вода в пористых средах при их низкой и средней проницаемости. Расчеты, выполненные без учета движения воды, будут более точными, чем расчеты, выполненные с учетом конвективного переноса с использованием модели воды без инверсии её плотности. Безразмерный параметр, предложенный авторами в работе [45], позволяет определить случаи, в которых возможно выполнения расчетов без учета конвективного теплопереноса. Тогда, когда проницаемость пористой среды высокая или необходимы расчеты конвективных потоков для решение других задач, использование в расчетах свободных конвективных течений с фазовыми переходами в пористой среде модели воды без максимума плотности не обосновано, так как это существенным образом исказит как физическую картину фильтрации, так и интегральные показатели моделируемой системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено исследование свободной конвекции в воде и в водонасыщенной пористой среде вблизи точки инверсии плотности. Основные результаты и выводы работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Представлена физико-математическая модель конвективного течения воды, при немонотонной зависимости плотности воды от температуры, которая учитывает граничные условия на свободной поверхности (эффект Марангони), а также зависимости динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности воды от температуры. Применение этой модели, позволяет корректно рассчитывать свободно конвективные течения и тепломассоперенос в системах, содержащих воду со свободной поверхностью.
2. Корректность представленной модели доказывается путём сравнения проведенных расчетов с данными физического и численного эксперимента, приведенными в работе [69]. Полученный в работе результат лучше согласуется с данными эксперимента.
3. В результате численного моделирования показано, что течение, вызываемое натяжением на свободной поверхности (эффект Марангони), значительно влияет на конвективный тепломассоперенос. При наличии свободной поверхности конвективное течение более интенсивно, возрастают средние скорости течения, что приводит к более быстрому охлаждению жидкости в сосуде.
4. Найдено решение многопараметрической задачи конвективного течения воды в высокопроницаемой пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей зависимость динамической вязкости, теплоёмкости, теплопроводности

воды, а также плотности, теплоёмкости, теплопроводности пористой среды от температуры.

5. В рамках этой модели путём обезразмеривания уравнения теплопроводности, представлен параметр  $\alpha$ , как отношение изменения температуры за счёт конвекции к изменению температуры за счёт теплопроводности, учитывающий геометрию задачи и проницаемость пористой среды. Параметр  $\alpha$  применим для определения схемы расчётов задач тепломассопереноса в пористой среде, в том числе с учётом фазовых переходов.
6. В водонасыщенных пористых средах при значениях  $\alpha \ll 1$  в теплофизических задачах можно не учитывать конвективное движение и использовать простые модели теплопроводности. В задачах массопереноса игнорирование явления инверсии плотности воды не позволит получить достоверный результат.
7. При  $\alpha \gg 1$  в задачах тепломассопереноса в водонасыщенных пористых средах использование моделей, не учитывающих наличие максимума плотности воды, приводит к значительным ошибкам в расчетах.
8. Наличие максимума плотности воды уменьшает роль конвективных течений в тепломассопереносе. Перестройка течения, то есть изменение его направления с нисходящего на восходящее, уменьшает интенсивность конвективного перемешивания. Расчеты показывают, что это явление позволяет пренебречь в теплофизических расчетах свободной конвекцией при значениях  $\alpha < 10$ .
9. Решена многопараметрическая задача кристаллизации воды в пористой среде в цилиндрическом сосуде с охлаждающим элементом на основе полной физико-математической модели тепломассопереноса при инверсии плотности воды, учитывающей конвективные течения, зависимость теплофизических параметров воды и пористой среды от температуры.

10. Показано, что свободное конвективное течение в водонасыщенной пористой среде вблизи области фазового перехода не может быть описано моделью, не учитывающей инверсию плотности воды. В области фазового перехода всегда существует восходящий конвективный поток, что определяет форму вертикальной границы области фазового перехода и степень промерзания пористой среды.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Алешкова И. А. Математическое моделирование сопряженной термогравитационной конвекции в пористой среде / И. А. Алешкова, М. А. Шеремет // Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьютер. Науки. – 2010. – №2. – С. 49–56.
2. Антонченко В. Я. Основы физики воды / В. Я. Антонченко, А. С. Давыдов, В. В. Ильин. – Киев.: Наук. думка. – 1991. – 668 с.
3. Арбузов В. А. Исследование конвективных структур и фазового перехода, индуцированных нестационарными граничными условиями в горизонтальном слое воды / В. А. Арбузов, Э. В. Арбузов, В. С. Бердников, Ю. Н. Дубнищев, О. С. Золотухина, С. А. Кислицын // Труды международной конференции по компьютерной графике и зрению "Графикон". – 2019. – №29. – С. 53-57. DOI:10.30987/GRAPHICON-2019-1-53-57
4. Астанина М. С. Моделирование естественной конвекции в замкнутой полости с источником энергии, окруженным по периметру пористой вставкой / М. С. Астанина, М. А. Шеремет // Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках : тезисы докладов XXII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева. Москва. – 2019. – Т. 2. – С. 35-36.
5. Бабаев В. В. Теплофизические свойства горных пород / В. В. Бабаев, В. Ф. Будымка, Т. А. Сергеева и др. – М.: Недра, 1987.
6. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В.М. Максимов – М.: Недра, 1993.
7. Батуров Л. Н. Об аномалиях естественной конвекции воды в окрестности 3,98 °С / Л. Н. Батуров, И. Н. Говор // Журнал технической физики. – 2016. – Т. 86. – № 2. – С. 3–6.
8. Батуров Л. Н. Обнаружение в воде неравновесных фазовых переходов / Л. Н. Батуров, И. Н. Говор, А. С. Обухов, В. Г. Плотниченко, Е. М. Дианов //

Письма в ЖЭТФ. – 2011. – Т. 93, № 2. – С. 92–94.

9. Большая энциклопедия нефти и газа. [Электронный ресурс] URL: Режим доступа: <https://www.ngpedia.ru/id558090p1.html>

10. Бочарова А. А. Влияние границы на свободноконвективное течение в пористой среде при заданной теплоотдаче с вертикальной поверхности / А. А. Бочарова, И. В. Плаксина // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 5-12.

11. Ганопольский Р. М. Гидродинамическое моделирование на OpenFOAM: учебное пособие для самостоятельного изучения / Р. М. Ганопольский, А. Я. Гильманов Тюмень Изд-во «Экспресс» 2022. – С. 104

12. Гарифуллин Ф. А. Возникновение конвекции в горизонтальных слоях жидкости / Ф. А. Гарифуллин // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т.6. №8. С. 108-114.

13. Гебхарт Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия // М.: Мир. – 1991. – 678 с.

14. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея-Бенара: Структуры и динамика / А. В. Гетлинг. – М.11: Эдиториал УРСС, 1999. – 247 с. ISBN 978-981-02-2657-2.

15. Говорухин В. Н. О воздействии внутренних источников тепла на конвективные движения в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 43–52.

16. Голдобин Д. С. Термоконвективные течения от источника тепла в слоистой пористой среде / Д. С. Голдобин, Т. Н. Загвозкин, Д. В. Любимов // XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред : тез. докл., Пермь, 18-22 февраля 2013 г. / РАН, УрО, Ин-т механики сплошных сред [и др.]. – Пермь, 2013. – С. 96.

17. Григорьев Б. А. Обзор работ по теории фильтрации углеводородных систем / Б. А. Григорьев, В. В. Качалов, Ю. В. Пазюк, В. Н. Сокотущенко // Научно-технический сборник – Вести газовой науки, М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2017. – №2 (30). – С. 182-202.

18. Гриценко С. А. Математические модели диффузии примесей в абсолютно твердых пористых средах: дис. на соискание ученой степени канд. ф.-м. наук: 01.01.02 / Гриценко Светлана Александровна. – Белгород, 2010. – 113 с.

19. Дементьев О. Н. Возникновение конвекции в горизонтальном плоском слое пористой среды / О. Н. Дементьев, Д. В. Любимов // Вестник ЧелГУ. – 2008. – № 10. – 130–135.

20. Ершов Э.Д. Основы геокриологии. Ч.4. Динамическая геокриология / Э. Д. Ершов, Л. С. Гарагуля, С. Н. Булдович, Е. Н. Оспенников, И. А. Комаров, С. Ю. Пармузин, Т. Ю. Шаталова, Р. Г. Мотенко, Л. Н. Максимова, О. М. Лисицына, И. Д. Данилов, Н. И. Труш, Э. З. Кучуков, Л. А. Жигарев, А. В. Брушков. М.: из-во МГУ, 2001. – 688 с.

21. Желнин М. С. Верификация термогидромеханической модели промерзания влагонасыщенного грунта на основе лабораторных экспериментов / Костина А. А., Прохоров А. Е., Плехов О. А., Семин М. А., Агутин К. А. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 2. – С. 144–158.

22. Загвозкин Т. Н. Неустойчивости и нелинейные режимы течения в гетерогенных средах при наличии внешнего потока: дис. на соискание ученой степени канд. ф.-м. наук: 01.01.09 / Загвозкин Тимофей Николаевич. – М., 2022 – 102 с.

23. Захаревич Ю. С. Методы прогнозирования масштабности растепления многолетнемерзлых грунтов / Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. – 2016. – № 8. – С. 7-20.

24. Зубков П. Т., Калабин Е. В. Численное исследование естественной конвекции воды вблизи точки инверсии плотности при числах Грасгофа до  $10^6$ . Изв. АН СССР. МЖГ. – 2001. – № 6. – С. 103–110.

25. Иванов Н.С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М.: Наука, – 1969. – 240 с.

26. Игошин Д. Е., Сабуров Р. С. Численное исследование зависимости проницаемости от пористой среды, образованной каналами регулярной

структуры // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Т. 1. № 1(1) – С. 84–90.

27. Инженерные изыскания для строительства составление прогноза изменений температурного режима вечномёрзлых грунтов численными методами / РСН 67 – 87. Госстрой РСФСР. – 1988.

28. Иноземцев В. И. Проблемы повышения качества строительства железнодорожных путей, мостов и транспортных тоннелей // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2013. – №4 (31). – С. 71-78.

29. Капырин И. В. Трёхмерное моделирование процессов переноса примесей в пористых средах сложной структуры: дис. на соискание ученой степени канд. ф.-м. наук: 05.13.18 Москва, 2007. – 115 с.

30. Колчанова Е. А. Возбуждение конвекции в слоях жидкости и насыщенной пористой среды в модулированном поле силы тяжести // Вестник пермского университета. – 2016. – №3. – С. 22-31.

31. Кудрявцев В. А. Общее мерзлотоведение. Изд. 2, пер. и доп. - М.: Изд-во МГУ, 1978. - 464 с.

32. Кудрявцев С. А. Промерзание и оттаивание грунтов (практические примеры и конечноэлементные расчеты) / С. А. Кудрявцев, И. И. Сахаров, В. Н. Парамонов // Группа компаний «Геореконструкция» – СПб. 2014. – С. 247.

33. Кузнецова Д. В. Конвекция в плоском слое с максимумом плотности / Д. В. Кузнецова, И. Н. Сибгатуллин // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Вып. 4. – 2012. – С. 92-99.

34. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. / Л. С. Лейбензон. Издательство: ОГИЗ, 1947. – 464 с.

35. Леонтьев Н. Е. Основы теории фильтрации / Н. Е. Леонтьев // М.: ЦПИ при МГУ, 2009. – 88 с.

36. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса. / А. В. Лыков,

Ю. А. Михайлов // М.: Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.

37. Мельников В. П. Оценка ущерба жилым и промышленным зданиям и сооружениям при изменении температур и оттаивании многолетнемерзлых грунтов в арктической зоне российской федерации к середине XXI века / В. П. Мельников, В. И. Осипов, А. В. Брушков, С. В. Бадина, Д. С. Дроздов, В. А. Дубровин, М. Н. Железняк, М. Р. Садуртдинов, Д. О. Сергеев, Н. А. Остарков, А. А. Фалалеева, Я. Ю. Шелков // Геозкология Инженерная геология Гидрогеология Геокриология. №1. – 2021. – С. 14-31.

38. Миндубаев М. Г. Численные оценки конвективной устойчивости наклонного слоя пористой среды / М. Г. Миндубаев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 289-297.

39. Надолин К. А. Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема / К. А. Надолин // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1989. – № 1. – С. 43–49.

40. Першин С. М. Об обнаружении неравновесных фазовых переходов в воде / С. М. Першин, Л. М. Крутянский, В. А. Лукьянченко // Письма в ЖЭТФ, – 2011. – Т. 94, № 2. – С. 125-129.

41. Полежаев В. И. Моделирование конвективных, волновых процессов и теплообмена в около сверхкритических средах // Механика Жидкости и Газа. – 2011. – №2. – С. 9-32.

42. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 576 с.

43. Сажин Б. С. Термокапиллярный механизм неустойчивости слоя жидкости (эффект Марангони) / Б. С. Сажин, М. В. Чунаев, В. Б. Сажин // Успехи в химии и химической технологии. – 2009. – Т. XXIII, №3. – С. 103-107.

44. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. - 10-е изд., доп. - Москва: Наука, 1987. - 430 с.

45. Симонов О. А. Влияние максимума плотности воды на охлаждение водонасыщенной пористой среды / О. А. Симонов, Л. Н. Филимонова //

Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62. № 4. – С. 68-79. DOI: 10.15372/PMTF20210400

46. Симонов О. А. Особенности охлаждения бактериальных суспензий // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова. – 2017. – Т. 12, №1. – С. 115-125. DOI: 10.21662/uim2017.1.017

47. Симонов О. А. Численное исследование влияния поверхностного натяжения на структуру течения в цилиндрическом сосуде с учетом максимума плотности воды / О. А. Симонов, Л. Н. Филимонова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. –2019. – Т. 5. № 3. – С. 131-146. DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-131-146

48. Сираев Р. Р. Исследование конвекции в горизонтальном цилиндрическом слое насыщенной пористой среды / Р. Р. Сираев, В. И. Якушин // Известия РАН. МЖГ. – 2008. – №2. – С. 83-91.

49. Сираев Р. Р. Конвекция и теплообмен в горизонтальном цилиндрическом слое насыщенной пористой среды с внутренними источниками тепла / Р. Р. Сираев, В. И. Якушин // Труды 4-й РНКТ. – 2006. – Т. 6. – С.117-121.

50. Соболева Е. Б. Начало конвекции Рэлея–Тейлора в пористой среде / Известия РАН. МЖГ. – 2021. – №2. – С. 525-62.

51. Сумгин М. И. Общее мерзлотоведение / М. И. Сумгин, С. П. Качурин, Н. И. Толстихин, В. Ф. Тумель. – М: Издательство АН СССР, 1940. – 340 с.

52. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / «Едиториал УРСС», 2001. – 320 с.

53. Таюкин Г. И. Воздействие сезонного промерзания грунтов на фундаменты строящихся объектов (терминал хранения сжиженных углеводородов) / Г. И. Таюкин, В. В. Фурсов, М. В. Балюра // Вестник Томского государственного архитектурностроительного университета. – 2019. – № 6. – С. 186-198. DOI: [10.31675/1607-1859-2019-21-6-186-198](https://doi.org/10.31675/1607-1859-2019-21-6-186-198)

54. Трифонова Т. А. Сравнительный анализ моделей Дарси и Бринкмана

при исследовании нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции в пористой цилиндрической области / Т. А. Трифонова, М. А. Шеремет // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5. № 4. – С. 623–634. DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-4-623-634

55. Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты: учеб. пособие М55 для строит. спец. вузов / С. Б. Ухов, В. В. Семенов, В. В. Знаменский и др.; Под С. Б. Ухова. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк. – 2007. – 566 с.

56. Цвигунов Д. Г. Влияние сезоннопромерзающих грунтов на фундаменты вертикальных стержневых элементов: дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук: 05.23.02 / Цвигунов Дмитрий Геннадьевич. – М., 2019. – 133 с.

57. Цытович Н. А. Механика мёрзлых грунтов / Н. А. Цытович. Издательство: М.: Высшая школа, 1973. – 450 с.

58. Чувилин Е. М. Применение водно-потенциометрического метода для определения содержания незамерзшей воды в мерзлых грунтах различного состава / Е. М. Чувилин, Н. С. Соколова, Б. А. Буханов, Ф. А. Шевчик, В. А. Истомин, А. З. Мухаметдинова, А. Г. Алексеев, Э. С. Гречищева // Криосфера Земли. – 2020. – №5. – С. 16-28.

59. Шабаров А. Б. Тепломассоперенос в нефтегазовых и строительных технологиях: учебное пособие / А.Б. Шабаров, А.А. Кислицын, Б.В. Григорьев, П.Ю. Михайлов, Л.А. Пульдас, У.Ю. Шастунова. Учебное пособие. — Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета. – 2014. — 332 с.

60. Шарфарец Е. Б. Свободная конвекция. Учет некоторых физических особенностей при моделировании конвективных течений с помощью вычислительных пакетов / Е. Б. Шарфарец, Б. П. Шарфарец // Научное приборостроение. – 2014. – Т. 24, № 2. – С. 43–51.

61. Anselmi C. Free convection experiments in water and deuterated mixtures at temperatures including the density maxima / C. Anselmi, M. De Paz, A. Marciano,

M. Pilo, and G. Sonnino // *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 33, no. 11, pp. 2519–2524, 1990. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90009-J

62. Bankvall C. G. Natural convection in vertical permeable space / *Waerme Stoffuebertrag.*, – 1974. – No. 7. – pp. 22-30.

63. Bejan A. Laminar Natural Convection Heat Transfer in a Horizontal Cavity with Different End Temperatures / A. Bejan, C. L. Tien. // *J. Heat Transfer.* – 1978. – Vol. 17. no. 4, pp. 641–647. DOI: 10.1115/1.3450870

64. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Applied Scientific Research.* 1949a. Vol. 1. pp. 27–34. DOI: 10.1007/BF02120313

65. Buell J. C. The Effect of Wall Conduction on the Stability of a Fluid in a Right Circular Cylinder Heated from Below / J. C. Buell, I. Catton // *J. Heat Transfer, Transactions of ASME* 105, 255. 1983.

66. Burns P. J. Convection in vertical Slot Filled with Porous / P. J. Burns, L. C. Chow, C. L. Tien // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1977. no. 20, pp. 919-926.

67. Capone F. Penetrative convection in anisotropic porous media with variable permeability / F. Capone, M. Gentile, A. A. Hill // *Acta Mechanica*, 2011. Vol. 216. no. 1-4, pp. 49–58. DOI: 10.1007/s00707-010-0353-2

68. Castinel G. Critere d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope horizontale / G. Castinel, M. Combarous // *C.R. Acad. Sci. B*, 1974. Vol. 278, pp. 701–704.

69. Cawley M. F. Flow visualization of free convection in a vertical cylinder of water in the vicinity of the density maximum / M. F. Cawley, P. McBride // *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2004. Vol. 47, no. 6–7, pp. 1175–1186.

70. Cawley M. F. Measurement of the temperature of density maximum of water solutions using a convective flow technique / M. F. Cawley, D. McGlynn, P. A. Mooney // *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2006. Vol. 49, no. 11–12, pp. 1763–1772.

71. Charlson G. S. On Thermoconvective Instability in a Bounded Cylindrical Fluid Layer / G. S. Charlson, R. L. Sani // *Intern. J. Heat Mass Transfer* 14, 2157. – 1971.



72. Handbook of Chemistry and Physics, Vol. 64th ed., CRC Press, Edition R. C. West, M. J. Astle, W. H. Beyer, Eds. Boca Raton, Florida, – 1984. – 2386 pp.

73. Harfash A. J. Simulation of three-dimensional double-diffusive throughflow in internally heated anisotropic porous media / A. J. Harfash, A. A. Hill // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. Vol. 72. pp. 609–615.

74. Hawng L. 'T. The effects of the density extremum and boundary conditions on the stability of a horizontally confined water layer / L. 'T. Hawng, W. 'F. Lu, J. C. Mollendorf // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol. 27, no. 4, pp. 497–510.

75. Horton C. W. Convection currents in a porous medium / C. W. Horton, Jr. F. T. Rogers // J. Appl. Physica, 1945. Vol. 16, no.6, pp. 367–370. DOI: 10.1063/1.1707601

76. Jeffreys H. The stability of a layer of fluid heated below: Phil. Mag., 1926. Vol. 2, pp. 833-844.

77. Katto Y. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium / Y. Katto, T. Matsuoka // International Journal of Heat Mass Transfer, 1967. Vol. 10, no.3, pp. 297–309. DOI: 10.1016/0017-9310(67)90147-0

78. Klarsfeld S. Champs de temperature associes aux mouvements de convection naturelle dans un milieu poreux limite //Rev. Gen. Thermique. – 1970. – Vol. 108. – pp. 1403-1423.

79. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium / E. R. Lapwood // Proc. Cambridge, 1948. Vol. 44, no.4., pp. 508–521.

80. Marangoni C. Sull espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid. – Pavia: Tipografia dei fratelli Fusi, 1865. p.66.

81. Mollendorf J. C. Onset of Convection in a Horizontal Layer of Cold Water J. / J. C. Mollendorf, K. H. Jann // Heat Transfer. 1983. Vol. 105, no. 3, pp. 460–465.

82. Moore D. R. Nonlinear penetrative convection / D. R. Moore, N. O. Weiss // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 61. no. 3, pp. 553–581.

83. Nield D. A. Convection in Porous Media / D. A. Nield, A. Bejan // 3rd Edition, Springer, New York, 2006. p.778.

84. Othman S. A Numerical Study of Transient Natural Convection of Water Near its Density Extremum // International Conference on Mechanical and Manufacturing Engineering (ICME 2008). – 2008, no. May.

85. Rees D. A. S. The onset of convection in an inclined anisotropic porous layer with oblique principle axes / D. A. S. Rees, L. Storesletten, A. Postelnicu // Transport in Porous Media, 2006. Vol. 62. no. 2, pp. 139–156. DOI:10.1007/s11242-005-0618-8

86. Schneider K. J. Investigation of the influence of free thermal convection on heat transfer through granular material // International Institute of Refrigeration, Proceedings. – 1963. – Vol. 247. – pp. 253.

87. Simonov O. A. Convective water flows in a cylindrical vessel near its maximum density / O. A. Simonov // in AIP Conference Proceedings, 2017. Vol. 030081, no. 1893. DOI: 10.1063/1.5007539

88. Simonov O. A. Features of the cooling of bacterial suspensions / O. A. Simonov // Works of the INSTITUTE of MECHANICS IM. R.R. MAVLYUTOV UC RAS. 2017. Vol. 12, no 1.

89. Sonnino G. Comparison between Experimental Data and Theoretical Calculations of Free Convection in Water near Its Density Maximum / G. Sonnino, M. De Paz // Mathl. Comput. Model, 1997. Vol. 25, no. 6, pp. 107–115.

90. Veronis G. Penetrative convection / G. Veronis // Astrophys J. 1963. Vol. 137, no. 2, pp. 641–663.

91. Walker K. L. Convection in a porous cavity / K. L. Walker, G. M. Homsy // Journal of Fluid Mechanics. – 1978. – Vol. 87. – pp. 449-474.

92. Weber J. E. The boundary layer regime for convection in a vertical porous layer // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1975. – Vol. 18. – pp. 569–573.

93. Yang B. Pavement damage behaviour of urban roads in seasonally frozen saline ground regions / B. Yang, Z. Qin, Q. Zhou, H. Li, L. Li // Cold Regions Science and Technology, Vol. 174, June 2020. 103035, – pp. 1–15.

94. Zubkov P. T. Investigation of Natural Convection in a Cubic Cavity near 4 °C / P. T. Zubkov, E. V. Kalabin, A. V. Yakovlev // Fluid Dynamics 37, 2002. P. 847.