На правах рукописи

Новаковский Николай Станиславович

Математическое моделирование безударного сильного сжатия газовых слоёв с одномерной симметрией при возрастании радиуса сжимающего поршня

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2017

Работа выполнена на кафедре «Естественнонаучных дисциплин» Федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования «Уральский государственный университет путей сообщения»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Баутин Сергей Петрович.

Официальные оппоненты: **Долголёва Галина Владимировна,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»,
ведущий научный сотрудник.

Адрианов Александр Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», профессор кафедры «Математического моделирования и процессов управления» института математики и фундаментальной информатики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 06 декабря 2017 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 217.274.14 при ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет» по адресу: 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет» и на сайте https://diss.utmn.ru/sovet/diss-sovet-212-274-14/zashchita/.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета *Е.А. Оленников*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена математическому моделированию безударного сильного сжатия одномерных слоёв идеального газа при возрастании радиуса сжимающего поршня (то есть когда в цилиндрическом или сферическом слое движется внутренняя граница по направлению к внешней - см. рис. 1). Исследование подобных течений является важным этапом изучения сжатия многомерных мишеней для управляемого термоядерного синтеза (УТС) [1] особой конструкции [2].

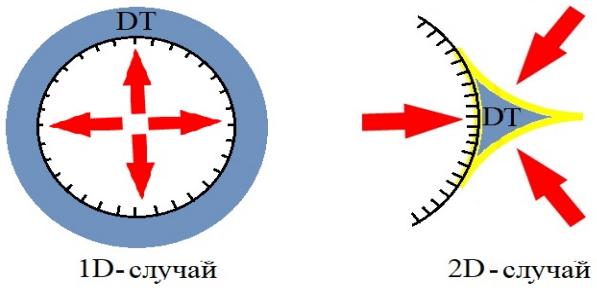

Рис. 1. *Сжатие газового слоя при возрастании радиуса сжимающего поршня*

В настоящей работе моделируются процессы, возникающие при сжатии одномерных слоёв идеального газа в случаях различной симметрии.

Актуальность темы исследований обусловлена тем, что решение проблем, связанных с сильным сжатием газовых слоёв является одним из ключевых шагов на пути осуществления управляемого термоядерного синтеза.

Считается, что исследование сильного сжатия в рамках модели газовой динамики для идеального политропного газа позволит выявить основные закономерности и дать некоторые рекомендации для реального осуществления происходящих процессов [3].

Идея безударного сжатия весьма привлекательна для получения сколь угодно больших плотностей при минимальных энергетических затратах благодаря отсутствию в течении ударных волн, т.е. из-за сохранения в процессе сжатия значения начальной энтропии [4].

В случае плоскосимметричных течений ($\nu = 0$) простая волна Римана [5], центрированная в заданный момент времени $t = t_*$, описывает сжатие плоского слоя газа до бесконечной плотности [6] в этот момент времени. Состыковка центрированной волны (ЦВ) Римана с однородным потоком газа дает решение задачи о получении в сжатом плоском слое любого конечного значения плотности [7].

При математическом описании процессов безударного сильного сжатия с помощью построения решений СУГД часто используют точные решения, полученные исходя из заранее указанных свойств этих решений: симметрия, автомодельность, линейность по части переменных и т.п.

На настоящий момент различными авторами получены четыре точных решения СУГД, описывающих процесс безударного сильного сжатия объёмов первоначально однородного и покоящегося газа:

1. Упомянутая выше простая центрированная волна Б. Римана, описывающая сжатие одномерного плоско-симметричного слоя до бесконечной плотности. Подробное описание безударного сильного сжатия плоского однородного слоя газа, первоначально находящегося в покое, приведено, например, в книге С.П. Баутина [8].

2. Автомодельные решения Л.И. Седова, описывающие сжатие одномерных объемов газа со сферической или цилиндрической симметрией. Автомодельные решения Л.И. Седова [9] интерпретированы на задачу безударного сильного сжатия, например, в работах И.Е. Забабахина, В.А. Симоненко [10].

3. Двумерное решение В.А. Сучкова, описывающее сжатие призмы при согласованных значениях показателя γ и угла призмы. Это решение предложено в работе В.А. Сучкова [11] для задачи об истечении газа с косой стенки и интерпретировано для описания безударного сильного сжатия специальных призм А.Ф. Сидоровым [12].

4. Трехмерное решение А.Ф. Сидорова, описывающее сжатие многогранника при согласованных значениях показателя γ и двугранных углов. Это решение предложено в работе А.Ф. Сидорова [13] для задачи об истечении газа из трехгранного угла, а затем в работе [12] интерпретировано им для описания безударного сильного сжатия специальных многогранников.

К сожалению, отклонение величины угла тела от фиксированного значения ведет к возникновению особенностей, и даже возникновению ударных волн, что доказано С.П. Баутиным [14].

Практическая реализация сжатия в соответствии с вышеупомянутыми точными решениями наталкивается на существенные технические трудности [3].

В [8, 14] Баутиным С.П. предложено полное математическое описание безударного сильного сжатия идеального газа. В частности, для случая сжатия цилиндрически $\nu = 1$ и сферически $\nu = 2$ симметричных слоев идеального газа с показателем $\gamma > 1$ доказано, что непрерывная состыковка двух течений дает решение задачи о безударном сильном сжатии до любой наперёд заданной плотности ненулевой массы газа.

Первое из этих двух течений является обобщением центрированной волны (ЦВ) Римана [8, 14]. Второе – является решением задачи о получении наперёд заданных распределений газодинамических параметров [14].

Доказанные в [8,14] теоремы устанавливают, что существуют цилиндрические и сферические слои с ненулевой массой газа, которые можно безударно сжать до любой плотности. Однако эти теоремы не позволяют определить границы возможной ширины исходных слоёв, то есть границы возможной массы сжимаемого газа, которую при фиксированных ν, γ можно безударно сжать до заданной плотности ρ_*.

В работе Николаева Ю.В. и Баутина С.П. [15] предложен алгоритм расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв первоначально однородного и покоящегося газа с $\rho_0 = 1$ до любой наперёд заданной конечной постоянной плотности $\rho_* > 1$ в обратном направлении изменения времени. В этой же работе предлагается восстанавливать так же в обратном направлении изменения времени закон движения поршня, сжимающего слой газа в случае уменьшении его радиуса с возрастанием времени. Необходимо особо отметить, что все расчёты, в том числе восстановление закона движения сжимающего поршня в работе [16] проведены в обратном направлении изменения времени. В работах [15, 16] вопрос о том как «сработает» в расчётах найденный закон движения поршня при возрастании времени не поднимался. Вышеупомянутый алгоритм существенно опирается на локальную теорему существования решения

в окрестности особой точки ($t = t_*, r = r_*$) [8, 14]. Для сжатия достаточно больших масс газа при расчёте траектории движения сжимающего поршня необходимо существенно отступать от $t = t_*, r = r_*$. Следовательно, в случае больших масс сжатого газа вопрос о соответствии полученного решения действительности до данной работы оставался открытым.

В работах А.В. Забродина и Г.В. Долголёвой [3,17], а также Г.В. Долголёвой с рядом соавторов [18–20] тщательно и подробно исследуется вопрос конструирования цилиндрических микромишений для УТС при использовании концепции безударного сжатия. Авторами рассмотрены ряд подходов, аналитически находятся приближённые законы энерговложения с целью осуществления безударного сжатия рабочей DT-области. Аналитические выкладки подтверждаются численными расчётами при учёте ряда физических процессов. Во всех этих работах рассматриваются такие режимы сжатия при которых радиус цилиндрической оболочки, сжимающей газ, стремится к нулю с течением времени.

Не смотря на большое количество работ, посвященных безударному сжатию газа, оно до сих пор не реализовано на практике. Причина этого, возможно, состоит и в том, что обычно сжатие газового слоя происходит так, что уменьшаются и геометрические размеры, и радиус сжимающего поршня. Процесс сжатия, при котором радиус поршня увеличивается с течением времени, изначально представляется более устойчивым [2].

Цели диссертационной работы

1. Разработать численную методику расчёта задач безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании радиуса сжимающего поршня (то есть когда поршнем является внутренняя граница слоя, движущаяся наружу - см. рис. 1).

2. При расчётах в обратном направлении изменения времени численно построить закон движения сжимающего поршня, который будет использоваться для моделирования воздействия на слой газа в расчётах при возрастании времени.

3. При заданном законе движения поршня численно построить при возрастании времени решения одномерной СУГД, описывающие сжатие слоёв различной симметрии и тем самым проверить является ли этот закон движения поршня рекомендацией для проведения физического эксперимента.

Задачи исследования

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. Реализовать методику сведения решения задачи сильного сжатия газа к последовательному решению нескольких ХЗК в зависимости от конфигурации течения. Изучить и проанализировать коэффициенты обобщённой центрированной волны Римана для случаев цилиндрической и сферической симметрии.

2. Создать программу, реализующую метод характеристик для решения задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в обратном направлении изменения времени в конфигурации Мизеса при возрастании радиуса сжимающего поршня.

3. Создать программу для решения одномерной СУГД при возрастании времени, основанную на общепризнанном алгоритме, провести её верификацию на точных решениях.

4. Получить приближенные аналитические формулы для звуковых характеристик обобщенной центрированной волны, с целью их применения в численных расчётах при возрастании времени.

5. Реализовать модификации методики расчёта при возрастании времени. Численно постро-

ить решение вплоть до момента сильного сжатия. Проанализировать результаты массовых численных расчётов.

6. Получить рекомендации для проведения физического эксперимента.

Объект исследования – нестационарные одномерные решения системы уравнений газовой динамики, являющиеся нелинейной системой уравнений с частными производными.

Предметом исследования являются методы моделирования одномерных течений идеального газа, возникающих в процессе безударного сильного сжатия.

Методы исследования

Для решения сформулированных задач в работе были использованы современные и хорошо апробированные методы аналитического и численного моделирования движения сжимаемой сплошной среды. Математическая модель среды, рассматриваемая в исследовании,– это система уравнений газовой динамики, адекватно описывающая процессы происходящие при сжатии газовых слоёв. В рамках этой модели формулируются конкретные начально-краевые задачи, для которых ранее были доказаны соответствующие аналоги теоремы Ковалевской, обеспечивающие существование и единственность локально-аналитического решения. Корректность сформулированных задач позволяет численно находить закон движения сжимающего поршня надёжным методом характеристик при решении задачи в обратном направлении изменения времени. Для моделирования воздействия поршня на слой газа используется общепризнанная неявная конечно-разностная схема «Ромб» [21], которая, с учётом введённых автором модификаций, позволяет строить численное решение вплоть до момента сильного сжатия.

Научная новизна работы по трём областям специальности 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ заключается в следующем.

Математическое моделирование

1. Приводятся конкретные начально-краевые задачи для одномерной СУГД, позволяющие численно построить траекторию поршня, сжимающего слой газа достаточно большой массы, в случае возрастания его радиуса при различной симметрии течения, при решении задачи в обратном направлении изменения времени.

2. Сформулирована начально-краевая задача при возрастании времени, при решении которой моделируется воздействие поршня, сжимающего слой газа в соответствии с ранее полученным законом его движения.

3. Определены газодинамические параметры течения идеального газа в момент сильного сжатия при воздействии на газовый слой в прямом направлении изменения времени.

4. Приведены энергетические характеристики построенных решений.

5. Реализация предыдущих пунктов дала прямые рекомендации для проведения соответствующих физических экспериментов.

Численные методы

1. При решении СУГД в обратном направлении изменения времени численно построены траектории движения сжимающего поршня, радиус которого увеличивается при возрастании времени, для различных начальных данных: показателя адиабаты идеального газа, массы сжимаемого слоя, симметрии задачи.

2. При решении задачи в прямом направлении изменения времени применены несколько модификаций классического конечно-разностного метода «Ромб», обеспечивающие повышенную точность расчёта в области слабого разрыва в решении.

Комплексы программ

Создан программно-вычислительный комплекс, основанный на трёх программах, ориентированный на численное решение одномерных задач безударного сильного сжатия газовых слоёв различной симметрии.

Первая часть комплекса - «Программа численного решения задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа» численно решает поставленную задачу в обратном направлении изменения времени. В ней реализован численный метод характеристик с пересчетом, с учётом разрешения особенности путем привлечения точного решения в особой точке. Кроме этого, так же в обратном направлении изменения времени численно восстанавливается закон движения сжимающего поршня.

С помощью второй программы - «Реализация конечно-разностного метода «Ромб» для численного решения одномерной системы уравнений газовой динамики» получены первые результаты численного моделирования воздействия сжимающего поршня на слой идеального газа при возрастании времени. В этой программе масса газа в расчётной области остаётся постоянной в течении всего расчёта, т.к. используемая методика - лагранжева, а правая граница расчётной области задаётся неподвижной.

Третья программа комплекса «ROBOC–расчёт задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа с учётом условий на характеристике» является реализацией разработанного автором комбинированного метода расчёта одномерной задачи безударного сильного сжатия газа. Комбинированный метод реализует возможность задания закона движения правой границы расчётной области в соответствии с законом движения звуковой характеристики. Этот закон задаётся аналитически или в таблично из расчёта первой программы.

Все программы прошли государственную регистрацию.

Теоретическая значимость

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

1. Предложена конкретная реализация моделирования при возрастании времени сжатия одномерных газовых слоёв до большой плотности, в том числе в 10^5 раз превышающей исходную плотность.

2. С помощью предложенной схемы моделирования сильного сжатия одномерных слоёв газа показано, что доказанные ранее локальные теоремы можно использовать для получения нелокальных результатов.

3. Предложены конкретные рекомендации для проведения физического эксперимента: законы движения сжимающего поршня и законы внешнего вложения энергии в виде соответствующих таблиц, для случаев разной симметрии и разных ρ_*, m_*.

Практическая ценность работы состоит в создании комплекса программ, при помощи которых сначала восстанавливается закон движения сжимающего поршня, а затем моделируется его воздействие на достаточно произвольный одномерный слой идеального газа; в верификации этих программ как при сравнении полученных численных решений с аналитическими, так и с данными других авторов, подтвердивших надёжность программы и достоверность получаемых с её помощью результатов. Это позволяет использовать созданный комплекс программ для формулировки рекомендаций для проведения физических экспериментов при различных входных данных.

Достоверность результатов обеспечивается использованием хорошо известной математи-

ческой модели – СУГД, корректной постановкой начально-краевых задач, для которых доказаны соответствующие аналоги теоремы Ковалевской. Кроме этого, для построения решения используются хорошо зарекомендовавшие себя численные методы. Все созданные программы прошли этап тщательного тестирования на точных решениях и сравнения с результатами других авторов.

На защиту выносятся результаты, соответствующие паспорту специальности 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

Пункт 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

1. Разработан и реализован новый метод расчёта задач безударного сильного сжатия газа при возрастании времени, совмещающий преимущества неявного конечно-разностного метода «Ромб» и метода отслеживания особенности. Его работоспособность и достоверность подтверждена при решении задач, имеющих аналитическое решение. Точность расчёта в окрестности слабого разрыва принципиально выше, чем у исходного метода «Ромб».

Пункт 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

2. Предложены приближенные аналитические формулы траекторий характеристик обобщенной центрированной волны, позволяющие уменьшить расчётную область численного метода при моделировании воздействия сжимающего поршня в прямом направлении изменения времени.

3. Численно определены траектории поршня с неубывающим радиусом, сжимающего достаточно большие массы газа, в случае безударного сильного сжатия газа при различных симметриях.

4. Показано, что при воздействии сжимающего поршня движущегося в соответствии с предварительно численно построенным законом, во всём слое газа, а не в отдельных его частях, достигается искомая большая плотность (вплоть до 10^5).

Пункт 4.Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

5. Создан программно-вычислительный комплекс на основе трёх, созданных автором программ, предназначенный для численного решения одномерных задач сильного сжатия газовых слоёв различной симметрии при воздействии сжимающего поршня, радиус которого увеличивается при возрастании времени. Программно-вычислительный комплекс функционирует на ПЭВМ.

Пункт 5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

6. Численные методы построения одномерных нестационарных течений идеального газа в возникающих условиях сильного сжатия и больших градиентов газодинамических параметров в рассматриваемой области.

7. Массовые расчёты одномерных областей газа в целях определения траекторий сжимающего поршня неубывающего радиуса, обеспечивающих сжатие областей с различной симметрией, различной массой до плотности, превышающей исходную в $10^4 - 10^5$ раз.

8. Приближенные решения СУГД, демонстрирующие возможность достижения во всём слое газа, сжимаемого поршнем по определённому закону, достаточно больших значений плотности.

Эти решения построены с помощью предложенного комбинированного метода, совмещающего преимущества неявной конечно-разностной схемы «Ромб» [21] и метода выделения особенности.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации присутствуют оригинальные результаты одновременно из трёх областей: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. В работе преобладают математические методы в качестве аппарата исследований и при получении результатов в виде новых математических методов, вычислительных алгоритмов и новых закономерностей.

Апробация результатов. Основные положения и результаты докладывались на следующих конференциях (см. в том числе [29]-[33]): Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии» (Екатеринбург, 2016); Всероссийской научной конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики памяти К.И. Бабенко» (Дюрсо, 2016); Всероссийской научной конференция «НАУЧНАЯ СЕССИЯ НИЯУ МИФИ - 2016» (Снежинск, 2016); XVI всероссийской научно-практической конференции «Дни науки НИЯУ МИФИ», (Озёрск, 2016); Международной конференции «XIII Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 2017); Всероссийской конференции с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», посвященной 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, 2017).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 12 печатных работах, в числе которых 3 опубликованы периодических изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 5 тезисов докладов, 3 зарегистрированные программы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложений. Текст диссертации содержит 108 страниц печатного текста, 59 рисунков, 4 приложения . Список использованной литературы включает 90 наименований работ российских и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы исследования, ставятся цели, формулируются задачи работы, приведены сведения о научной новизне, практической значимости, основные результаты, выносимые на защиту, апробация результатов в публикациях.

Первая глава содержит три параграфа и посвящена обзору известных результатов, а так же аналитических результатов полученных автором.

В первом параграфе приводится подробный обзор литературных источников, посвященных аналитическим и численным исследованиям задач сильного сжатия.

В параграфе 1.2 для полноты приведены результаты, полученные ранее другими авторами. Описывается выбранная математическая модель, затем ставятся конкретные начально-краевые задачи для СУГД с условиями на характеристиках для отыскания решения в двух областях определения, разделяемых звуковой C^+ характеристикой.

Сначала ставится задача отыскания траектории движения сжимающего поршня в обратном направлении изменения времени. Для этого рассматриваются одномерные изэнтропические те-

чения политропного газа. Такие течения являются решениями системы уравнений [14]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c\left(u_r + \nu\dfrac{u}{r}\right) = 0, \\ u_t + \dfrac{2}{(\gamma-1)} cc_r + uu_r = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука в газе, ρ – плотность, $\gamma > 1$ — константа в уравнении состояния $p = \rho^\gamma/\gamma, p$ — давление; c, u— искомые функции. Значения $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

В случае $\nu = 0$ в системе (1) $r = x_1$, $u = v_1$— проекция вектора скорости $\mathbf{V}$ на ось Ox_1.

В случае $\nu = 1, 2$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2} \geq 0,$$

а скорость газа u есть проекция вектора $\mathbf{V}$ на радиус-вектор в плоскости x_1Ox_2 при $\nu = 1$ или на радиус-вектор в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 при $\nu = 2$.

Далее рассматривается сжатие газового слоя «изнутри», то есть в том случае когда движется та граница слоя, чья начальная пространственная координата меньше («внутренняя» граница), другая граница остаётся неподвижной. На рисунке 2 этот процесс представлен графически.

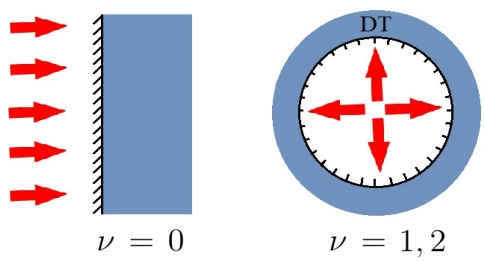

Рис. 2. *Сжатие слоя «изнутри»*

Пусть в некоторой окрестности точки $(t = t_*,\ r = r_*)$ при $r_* > 0$ задано фоновое течение $c(t, r) = 1$, $u(t, r) = 0$.

На рис. 3, а) в области 0 находится фоновое течение, а в области 1 требуется построить искомое течение с наперёд заданным распределением одного из газодинамических параметров, которое будет сопряжено с фоновым течением через слабый разрыв. Слабым разрывом будет являться звуковая характеристика C^+, траектория которой в описанных выше условиях имеет простой вид:

$$r(t) = r_* + t - t_*.$$

Краевое условие на этой характеристике:

$$c|_{C_0^+} = 1, \quad u|_{C_0^+} = 0. \tag{2}$$

Задача (1),(2) является характеристической задачей Коши (ХЗК), для существования и единственности решения которой задаётся дополнительное краевое условие - условие вертикали [8]. Эта задача называется далее ХЗК1.

а) б)

Рис. 3. Области однородного покоя и ЦВ сжатия (а), области определения ХЗК1 и ХЗК2 (б)

Предполагаем, что искомое течение является составным. Область определения решения состоит из двух частей: области 1 (обозначена цифрой 1 на рис.3, б) — области определения обобщения ЦВ Римана и области 2 (обозначена цифрой 2 на рис. 3, б)) — области определения течения, имеющего в момент $t = t_*$ наперёд заданное постоянное распределение $c^*(r) = c^* = \text{const}$. Характеристика C_1^+ определяется решением соответствующей задачи Коши, которая имеет единственное аналитическое решение [14]. На этой характеристике значения параметров газа являются аналитическими функциями

$$c = c_1(t), u = u(t, c_1(t)) \equiv u_1(t), \tag{3}$$

определяемыми из решения ХЗК1.

В области 2 ставится новая ХЗК, называемая ХЗК2. К системе (1) добавляются условия на характеристике C_1^+ и краевые условия

$$\begin{aligned} &c(t,r)|_{r=r_1(t)} = c_1(t), \\ &u(t,r)|_{r=r_1(t)} = u(t, c_1(t)), \\ &c(t,r)|_{t=t_*} = c_* \equiv \text{const}. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналитическая функция $r_1(t)$ считается известной, для неё выполняется соотношение

$$\frac{dr_1(t)}{dt} = u_1(t) + c_1(t) \tag{5}$$

Функция $c = c_*(r)$ считается аналитической, известной и связанной соотношением $c_*(r) = [\rho_*(r)]^{(\gamma-1)/2}$ с наперёд заданным в момент $t = t_*$ требуемым распределением плотности $\rho = \rho_*(r)$. Тогда ХЗК2 (1), (5), (4) имеет в окрестности точки (t_*, r_*) единственное аналитическое решение [14]. Это решение описывает волну сжатия и в случаях неплоской симметрии называется обобщенной центрированной волной (ОЦВ) [14].

Далее ставится задача Коши для отыскания траектории сжимающего поршня, которая так же имеет единственное аналитическое решение.

Для построения решения при возрастании времени используется система уравнений газовой динамики в лагранжевых массовых переменных в одномерном случае.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m},\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m},\\
&\frac{\partial E}{\partial t} + v\frac{\partial (pu)}{\partial r} = 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

где $t, r, m, \rho, v = \frac{1}{\rho}, \varepsilon, p$ - соответственно: время, эйлерова координата, массовая лагранжева координата, плотность, удельный объем, удельная внутренняя энергия, давление, $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}-$ удельная полная энергия.

Система замыкается уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\cdot \cdot \rho C_v T$, $\varepsilon = C_v T$, где $C_v, T-$ теплоемкость при постоянном объёме и температура газа соответственно.

К системе (6) присоединяются граничные и начальные условия в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&u|_{r=r_L}(t) = u_p(t),\\
&u|_{r=r_R}(t) = 0,\\
&u(x,0) = 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где r_L, r_R - левая (Left) и правая (Right) границы отрезка, на котором решается система (6).

В момент времени $t = 0$ $x_L = r_p(0), x_R = r_*$. $u_p(t), r_p(t)$ - соответственно скорость и траектория сжимающего поршня, полученные при решении задачи в обратном направлении изменения времени.

В процессе решения можно использовать известные траектории $r_{C^+}(t)$ и скорости движения $u_{C^+}(t)$ характеристик ОЦВ. Это делается для уменьшения исследуемой области. Правая граница отрезка в этом случае движется в соответствии с законом $r_{C^+}(t)$. Тогда граничные условия 7 заменяются на следующие:

$$
\begin{aligned}
&u|_{x=x_L}(t) = u_p(t),\\
&u|_{x=x_R}(t) = u_{C^+}(t),\\
&u(x,0) = 0,
\end{aligned}
$$

В этом случае в начальный момент времени $t = 0$ правая и левая границы совпадают, т.к. поршень, стартуя порождает возмущение в покоящемся газе, распространяющееся со скоростью звука $r_L = r_p(0) = r_R = r_{C^+}(0)$. При $t > 0$ $r_R = r_p(t) < r_R = r_{C^+}(t)$.

Во параграфе 1.3 приводится вывод обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) для определения траектории звуковых C^+ характеристик ОЦВ, а так же приводятся решения этого уравнения для некоторых частных случаев.

Полученные ОДУ в случаях $\gamma = 3, \gamma = 5/3, \gamma \neq 3, 5/3$ выглядят следующим образом:

$$
\left[2 + \left(\frac{2\nu}{r_*}\ln c + \frac{\nu}{r_*} - 2\frac{\nu}{r_*}c\right)\tau\right]\frac{dc}{dt} = \frac{\nu}{r_*}c - \frac{\nu}{r_*}c\ln c \tag{8}
$$

$$
\left[4 + \left(\frac{12\nu}{r_*}c + \frac{6\nu}{r_*}c^2 + \frac{20\nu}{r_*}c\ln c\right)\tau\right]\frac{dc}{dt} = \frac{2\nu}{r_*}c^2 - \frac{6\nu}{r_*}c - \frac{4\nu}{r_*}c^2\ln c \tag{9}
$$

$$\left[2\alpha + \left(\frac{4\nu\alpha(2+A)}{Br_*}c - \frac{8\nu\alpha}{Ar_*}\right)\tau\right]\frac{dc}{dt} = \left[\frac{2\nu\alpha}{r_*}\left(\frac{2c}{A} - \frac{Ac^2}{B}\right)\right], \tag{10}$$

где $A = 3 - \gamma$, $B = 5 - 3\gamma$.

Решения уравнений (8)-(10) не выписываются в квадратурах. Однако, при физически обоснованных ограничениях $c \leq 100, \tau \to 0$ в окрестности точки (t_*, r_*) можно выписать приближённые формулы, описывающие решения уравнений (8),(10):

$$c(\tau) = \exp\left[\left(\ln c_* - \tfrac{1}{3}\right)\exp\left(-\tfrac{3\nu}{2r_*}\tau\right) + \tfrac{1}{3}\right] \tag{11}$$

$$c(\tau) = \frac{2B}{A^2\left[1 - \left(1 - \frac{2B}{A^2c_*}\right)e^{-\frac{2\nu}{Ar_*}\tau}\right]} \tag{12}$$

В **главе 2** подробно представляются численные методики, используемые для решения поставленных в первой главе задач. Кроме этого описан программно-вычислительный комплекс, основанный на трёх программах, реализующих соответствующие численные алгоритмы.

Параграф 2.1 посвящен подробному описанию применяемой для решения одномерных задач сильного сжатия в обратном направлении изменения времени разновидности метода характеристик. Кроме этого приводится алгоритм восстановления траектории сжимающего поршня так же в обратном направлении изменения времени. Эти методы были разработаны и использованы другими авторами ранее [15, 16].

В параграфе 2.2 приводится вывод известных основных формул неявного конечно-разностного метода «Ромб» для численного решения одномерной СУГД при возрастании времени [21]. Описываются особенности реализации метода в данной работе.

Параграф 2.3 посвящён подробному описанию комбинированного метода расчёта одномерных задач безударного сильного сжатия, использующего как все преимущества метода «Ромб», так и информацию о характеристиках течения, которая используется для расчёта правой границы. Основная сложность алгоритма состоит в аккуратном определении значений временны́х шагов при расчёте добавляемых к расчётной области интервалов. При этом существенно используется как решение, полученное методом характеристик, так и аналитические решения для траекторий звуковых характеристик, полученные в первой главе.

Далее кратко описывается частный случай, когда правая граница - звуковая C_0^+ - характеристика, разделяющая покоящийся газ и область ОЦВ.

Пусть расчёт доведен до момента времени t^n. Расчёт на n-м временном шаге методом «Ромб» вёлся в первых N интервалах расчётной сетки. Далее:

1) выбирается шаг по времени τ^{n+1} исходя из соображений точности расчёта;

2) используя дискретный набор значений $u_p(t)$, полученный при решении задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени, с помощью линейной интерполяции вычисляется $u_p\left(t^n + \tau^{n+1}\right)$. В соответствии с известной траекторией $r_{C^+}(t)$, получаем $r_{C^+}\left(t^n + \tau^{n+1}\right)$;

3) добавляется к расчётной области $(N+1)$-й интервал, так что $r_{N+1} = r_{C^+}\left(t^n + \tau^{n+1}\right)$, значения газодинамических параметров на n-м слое в добавленном интервале соответствуют фоновому течению;

4) делается вычисления согласно формулам метода «Ромб». Таким образом строится решение на новом временном слое.

Метод «Ромб» является неявным и обладает безусловной устойчивостью. Следовательно можно выбирать шаг по времени достаточно произвольно. Тем не менее из условия точности расчёта временны́е шаги начиная со второго выбираются в соответствии с критерием Куранта: $\frac{C\tau}{h} \leq 1$, где τ, h - шаг по времени и по пространственной переменной соответственно, $C = \text{const}$. Для старта алгоритма, т.е. для обеспечения достаточного количества узлов расчётной сетки внутри рассчитываемой методом «Ромб» области, первый шаг τ_1 делается большим. Если при этом для сходимости метода требуется более 10 итераций, счёт прерывается и начинается заново с более мелким шагом τ_2.

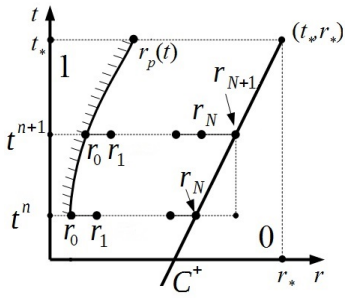

Рис. 4. *Добавление расчётного интервала на правой границе*

Опишем более подробно пункт 3 предложенного алгоритма (см. рис. 4). На текущем шаге во всей области $r_N < r < r_*$ газодинамические параметры соответствуют фоновому течению. При переходе на следующий временной слой правая граница смещается в соответствии с траекторией C_0^+ - характеристики. Величины с n-го слоя во всех интервалах кроме $(N+1)$-го берутся равными расчётным значениям, полученным методом «Ромб». Массовая координата $(N+1)$-го интервала вычисляется по фоновой плотности в зависимости от симметрии задачи $m_{N+1} = \rho_0 \cdot (r_{N+1}^{\nu+1} - r_N^{\nu+1})$, где $\nu = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Таким образом правая граница передвигается по покоящемуся газу. Такой метод избавляет от погрешностей, которые могли бы возникнуть при более общем подходе расчёта правой границы.

В четвёртом параграфе второй главы диссертации дано подробное описание программно-вычислительного комплекса, основанного на трёх программах, позволяющего численно решать одномерные задачи сильного сжатия газовых слоёв при увеличении радиуса сжимающего поршня. Результатом работы комплекса являются табличные временные зависимости, описывающие такое воздействие сжимающего поршня на данную массу газа, при котором реализуется безударное сжатие до требуемой плотности, а так же распределение газодинамических параметров в исследуемой области на заданные моменты времени.

Программно-вычислительный комплекс состоит из пяти основных блоков - управляющей программы, модуля разбора входной информации, программы решения задачи сильного сжатия в обратном направлении изменения времени, блока решения задачи при возрастании времени и блока расчёта интегральных характеристик и записи.

Исходные данные для расчёта задаются пользователем перед началом работы комплекса в отдельном файле, в котором входные параметры задаются в виде именованного списка.

Модуль расчёта в обратном направлении изменения времени численно восстанавливает па-

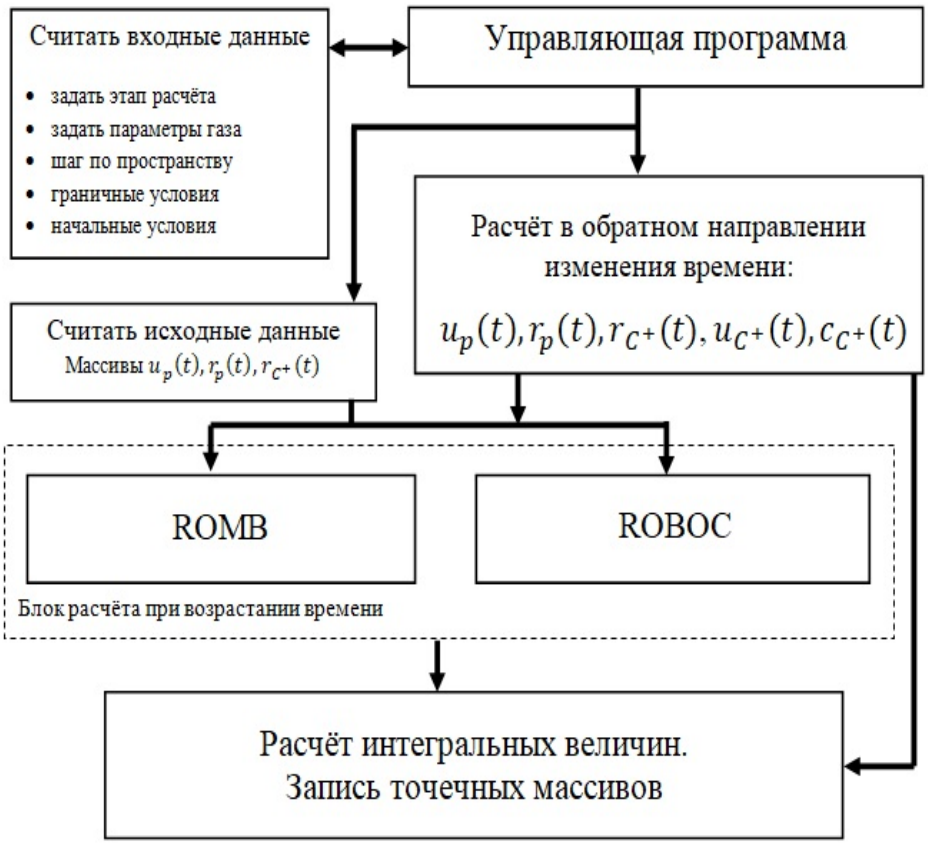

Рис. 5. *Блок-схема программно-вычислительного комплекса*

раметры газа, траекторию и скорость сжимающего поршня при помощи варианта метода характеристик с пересчётом. Данный алгоритм реализован в «программе численного решения задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа» (свидетельство о регистрации № 2016613170 от 18.03.2016).

Результатом работы вышеозначенной программы является набор текстовых файлов, содержащих рассчитанные таблицы траекторий сжимающего поршня и звуковых характеристик. Визуализация результатов расчёта в обратном направлении изменения времени осуществляется при помощи специальных пакетов, реализованных в среде matlab.

Результаты работы блока расчёта в обратном направлении изменения времени могут сразу передаваться в блок для решения задачи при возрастании времени. Этот блок состоит из двух программ: «Реализация конечно-разностного метода «Ромб» для численного решения одномерной системы уравнений газовой динамики» (свидетельство о регистрации № 2016619500 от 22.08.2016) и «ROBOC–расчёт задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа с учётом условий на характеристике» (свидетельство о регистрации № 2017619668 от 01.09.2017).

Во второй программе так же реализован и блок расчёта интегральных величин и запись точечных массивов. В этом модуле вычисляются дисбаланс массы и энергии, нормы относительных погрешностей в случае плоской симметрии и осуществляется запись расчётных значений в требуемые моменты времени.

В этом параграфе так же подробно описывается процедура тестирования отдельных частей комплекса и описывается процесс визуализации результатов в среде matlab.

В **главе 3** приведены результаты численного моделирования задач безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании радиуса поршня как в обратном направлении изменения времени так и в прямом.

В параграфе 3.1 подробно изложены результаты тестирования реализованного варианта метода характеристик с пересчётом. Приводятся графики и таблицы, подтверждающие хорошую точность метода на плоско-симметричных задачах, имеющих точное решение. Газодинамические параметры течения восстанавливаются с машинной точностью, относительная погрешность при численном восстановлении траектории движения сжимающего поршня удовлетворительна и убывает обратно пропорционально увеличению числа расчётных точек метода, достигая значения 10^{-5} при количестве численно восстанавливаемых звуковых характеристик 2000 на 2000. Кроме этого излагаются результаты численного решения задач, не имеющих точного решения для случаев цилиндрической и сферической симметрии. Посчитано около 20 вариантов задач, отличающихся друг от друга показателями адиабаты идеального газа, массой сжимаемого слоя, и достигаемыми плотностями в сжатом слое газа. Для проверки точности полученного решения задачи использовался следующий критерий: равна ли масса несжатого слоя шириной d_0 массе сжатого слоя шириной d_*, т. е. проверялось равенство масс в начальный и конечный моменты сжатия газа. В рассчитанных вариантах задач различие масс сжатого и несжатого газа колеблется 0.01% до 0.37%.

Во параграфе 3.2 приводятся результаты расчётов методом «Ромб» различных задач безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании времени. Показаны результаты численного моделирования воздействия сжимающего поршня с неубывающим в процессе движения радиусом на слой газа различной симметрии. Первые же результаты показали хорошую точность расчётов до момента времени $0.999t_*$

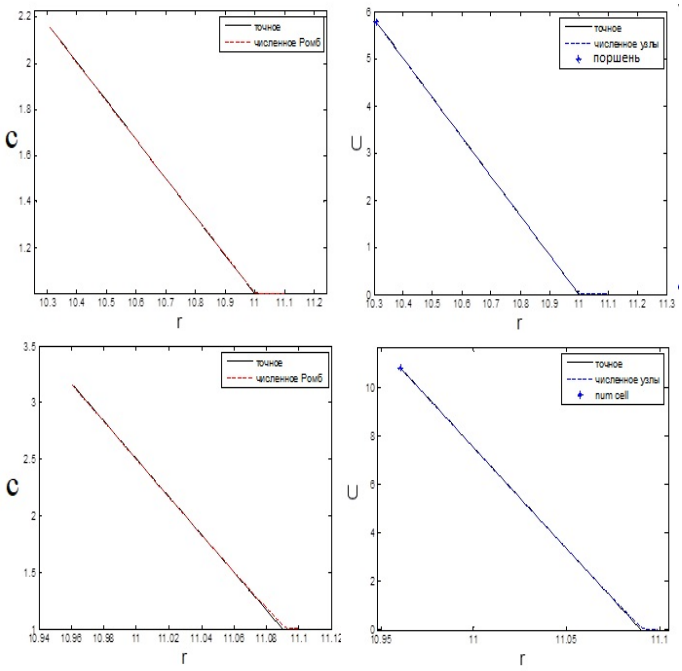

Рис. 6. Скорость и скорость звука на момент времени $t = 0.99t_*$ (вверху), $t = 0.999t_*$ (внизу)

В таблице 1 представлены погрешности расчётов при варьировании момента окончания счё-

та t_{end}. Используются обозначения: u_{ex}, c_{ex} - точные значения скорости и скорости звука (ЦВ Римана), u_{num}, c_{num} - значения скорости и скорости звука полученные численно. $||\cdot||_C$ - непрерывная норма.

Таблица 1. Погрешности метода «Ромб» при расчёте плоско-симметричной задачи

t_{end}	$\|\|u_{ex} - u_{num}\|\|_C$	$\|\|c_{ex} - c_{num}\|\|_C$	$\frac{\|\|c_{ex}-c_{num}\|\|_C}{\|\|c_{num}\|\|_C} \cdot 100\%$
$0.5 \cdot t_{ex}$	0.0018	$3.6304 \cdot 10^{-4}$	0.031
$0.8 \cdot t_{ex}$	0.0043	$8.8103 \cdot 10^{-4}$	0.0673
$0.9 \cdot t_{ex}$	0.0088	0.0018	0.12
$0.99 \cdot t_{ex}$	0.0835	0.0170	0.78

Из рисунка 6 и таблицы 1 можно сделать вывод, что метод «Ромб» хорошо описывает распространение центрированной волны сжатия по покоящемуся газу до момента времени $t_{end} = 0.999t_*$.

Однако при приближении к моменту сильного сжатия волна сжатия в крайних интервалах расчётной сетки начинает обгонять точное решение, что приводит к нефизичным возмущениям на правой границе и аварийной остановке расчёта.

В параграфе 3.3 приводятся результаты расчётов комбинированным методом с отслеживанием особенности.

Сначала было проведено сравнение на тестовой задаче расчётных значений полученный методом «Ромб» без выделения особенностей и комбинированным методом. Из рисунка 7 можно сделать следующий вывод: представляемый метод описывает решение в области волны сжатия и в области слабого разрыва принципиально точнее исходного метода «Ромб».

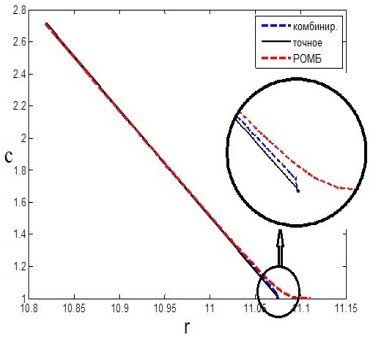

Рис. 7. *Сравнение расчётов двумя методами*

Затем были проведены расчёты одномерных задач безударного сильного сжатия новым комбинированным методом в случае различной симметрии и различных показателей адиабаты идеального газа.

Ниже приводятся рисунки, демонстрирующие хорошую точность модифицированного метода в том числе и в области стыковки волны сжатия с покоящимся газом при расчётах задач с различной симметрией.

В качестве эталонного используется решение соответствующих задач в обратном направлении изменения времени методом характеристик с пересчётом.

Стоит отметить, что область стыковки волны сжатия и покоящегося газа описывается достаточно точно. Для примера приведены два решения различных задач. На рисунке 8

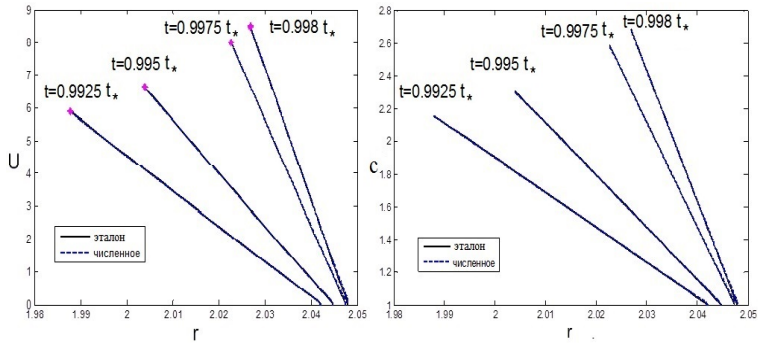

Рис. 8. Результаты расчёта на различные моменты времени $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$

приведены профили искомых величин на различные моменты времени для цилиндрически-симметричной задачи $\gamma = 1.4, m^* = 10, \nu = 1$, а на рисунке 9 для сферически-симметричной задачи $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$.

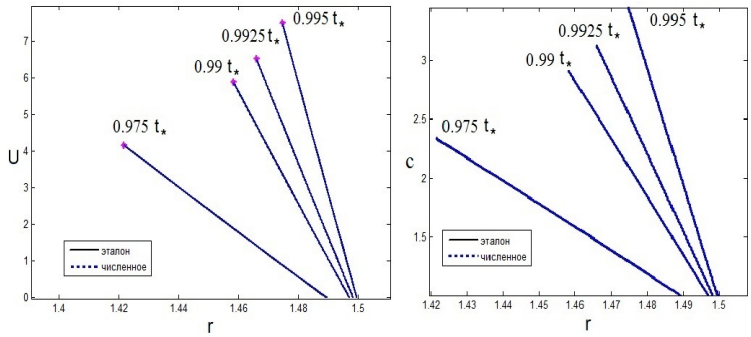

Рис. 9. Результаты расчёта на различные моменты времени $\gamma = 5/3, m^* = 10, \nu = 2$

Использование лагранжевых массовых координат в схеме «Ромб» вкупе с аккуратным определением правой границы области с помощью аналитической формулы траектории характеристики позволяет обеспечить выполнение закона сохранения массы в конце расчёта на уровне близким к машинному нулю. Для проверки закона сохранения энергии на каждом шаге по времени t^n производится подсчёт дисбаланса по следующей формуле:

$$\Delta E^n = \frac{\sum\limits_{k=1,N} m_k \cdot (E_k^n - E_k^0) + W}{\sum\limits_{k=1,N} m_k \cdot E_k^n}, \tag{13}$$

где m, E_k^n, E_k^0 - масса , удельная полная энергия интервала на текущий и на начальный момент времени, W -работа сжимающего поршня, вычисляемая по формуле:

$$W = \sum_{l=2,n} \frac{1}{2}(P^{l-1} + P^l)(V^l - V^{l-1}) \approx \int\limits_{t^0}^{t^n} P\, dV,$$

где P^l, V^l - давление на левой границе и объем системы на $l-$м временном шаге, посчитанные по вычисленным ранее параметрам: скорости звука на поршне и координате поршня соответственно.

Дисбаланс энергии на различные моменты времени для одного из расчётов приведён в таблице 2. Дисбаланс связан с неточностью определения скорости поршня на текущем шаге по

Таблица 2. Дисбаланс энергии на различные моменты времени

$0.95t^*$	$0.975t^*$	$0.99t^*$	$0.995t^*$	$0.998t^*$
$-5.086 \cdot 10^{-5}$	$-8.753 \cdot 10^{-5}$	$-2.958 \cdot 10^{-4}$	$-3.386 \cdot 10^{-4}$	$-4.670 \cdot 10^{-4}$

времени с помощью линейной интерполяции. Из таблицы 2 видно, что он практически не меняется с начала расчёта и его величина незначительна.

Рекомендациями для проведения физического эксперимента могут служить как таблицы, описывающие изменение скорости сжимающего поршня, так и таблицы требуемого энерговложения, рассчитываемые по работе поршня, совершаемой над газовым слоем. На рисунке 10 приводятся графики скорости поршня и энерговложения в слои газа различной симметрии от времени. Параметры газового слоя не менялись: $m_* = 10, \rho_* = 10^5, \gamma = 1.4$.

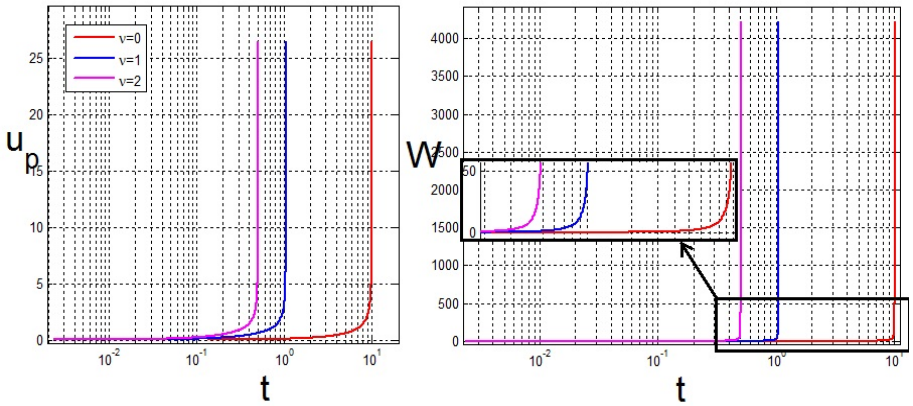

Рис. 10. Скорость и работа поршня при различной симметрии задачи

На нижней части рисунка 10 приведен укрупнённые графики скорости поршня в моменты времени, близкие к сильному сжатию. Хорошо виден момент переключения, когда сжимающий поршень начинает двигаться по другому закону. В плоско-симметричной задаче скорость становиться постоянной, при других симметриях поршень плавно замедляется. Стоит отметить, что значение скорости поршня изменяется только в восьмом знаке после запятой.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Получен закон движения сжимающего поршня в случае, когда его радиус не стремится к нулю, обеспечивающий сжатие одномерного слоя газа заданной массы до заданной плотности, получен при решении задачи в обратном направлении изменения времени. Показана работоспособность предложенного алгоритма расчёта одномерных задач сильного сжатия в рассматриваемом случае. Расчёты в обратном направлении изменения времени позволяет восстанавливать искомую траекторию сжимающего поршня с нужной точностью за 1-2 минуты на стандартном PC. Таким образом, получены рекомендации по проведению физического эксперимента в виде закона движения сжимающего поршня.

2. При известном $r = r_p(t)$ проведены расчёты различных задач сильного сжатия одномерных слоёв газа при возрастании времени методом «Ромб». Результаты показывают, что численный алгоритм с хорошей точностью восстанавливает решение вплоть до момента времени $0.999t_*$. Дальнейшие расчёты демонстрируют, что при приближении к особенности в решении, когда производные на граничной звуковой характеристике начинают расти быстро, точность расчёта ухудшается. Можно ослабить этот эффект, отодвинув правую границу расчётной области.

3. Реализованная модификация метода «Ромб» обеспечивает повышение точности расчёта вплоть до момента $t = t_*$.

4. Автором предложен подход, который обеспечивает не только построение закона движения сжимающего поршня для произвольного одномерного слоя газа, но и численно подтверждает тот факт, что этот поршень действительно сжимает требуемую массу газа (в том числе $m_* = 10$) до необходимой плотности (в том числе до плотности $\rho_* = 10^5$).

Следовательно, представленные результаты дают конкретные рекомендации для проведения физического эксперимента.

Список литературы

[1] *Накколс Дж.Г.* Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза. // *УФН.* — 1984. — Т. 143, № 3. — С. 467–482.

[2] Пат. 2432627 РФ. Мишень для получения термоядерных реакций/ Баутин С.П. // *Бюллетень.* — 2011. — № 30. — С. 8.

[3] *Долголева Г.В., Забродин А.В.* Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 71 с.

[4] *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. — М.: Наука, 1988. — 173 с.

[5] *Риман Б.* О распаде плоских волн конечной амплитуды. // Сочинения. — М.: Гостехиздат, 1948. — 376–395 с.

[6] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 856 с.

[7] *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: Изд. иностранной литературы, 1961. — 588 с.

[8] *Баутин С.П.* Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. — Новосибирск: Наука, 1997. — 160 с.

[9] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981. — 804 с.

[10] *Забабахин И.Е., Симоненко В.А.* Сферическая центрированная волна сжатия // *Прикладная математика и механика.* — 1978. — Т. 42. Вып. 3. — С. 573–576.

[11] *Сучков В.А.* Истечение газа в вакуум на косой стенке. // *Прикладная математика и механика.* — 1963. — Т. 27. Вып. 4. — С. 739–740.

[12] *Сидоров А.Ф.* Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // *Доклады АН СССР.* — 1993. — Т. 329, № 4. — С. 444–448.

[13] *Сидоров А.Ф.* Некоторые оценки степени куммуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // *Доклады АН.* — 1991. — Т. 318, № 3. — С. 548–552.

[14] *Баутин С.П.* Математическое моделирование сильного сжатия газа. — Новосибирск: Наука, 2007. — 308 с.

[15] *Баутин С.П., Николаев Ю.В.* Об одном методе расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // *Вычислительные технологии.* — 2000. — Т. 5, № 4. — С. 3–12.

[16] *Николаев Ю.В.* О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // *Вычислительные технологии.* — 2001. — Т. 6, № 2. — С. 104–108.

[17] *Долголева Г.В., Забродин А.В.* Расчетное конструирование микромишеней для осуществления безударного сжатия // *Труды ИММ УрО РАН.* — 2008. — Т. 14:1. — С. 31–40.

[18] *Долголева Г.В.* Численное исследование работы цилиндрических мишеней при различных режимах безударного сжатия и состава рабочей области // *Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2009. — № 062.

[19] *Долголева Г.В., Николаева О.В.* Методика расчета гибридной микромишени // *Математическое моделирование.* — 2012. — Т. 24:11. — С. 3–19.

[20] *Долголева Г.В., Забродина Е.А.* Сравнение двух моделей расчета термоядерной кинетики // *Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2014. — № 068.

[21] *Гаджиев А.Д., Писарев В.Н.* Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 1979. — Т. 19, № 5. — С. 1288–1303.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК РФ

[22] *Новаковский Н.С.* Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // *Математические структуры и моделирование.* — 2016 — №3 (39) — С. 93— 109.

[23] *Новаковский Н.С.* Комбинированный метода расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса// *Математические структуры и моделирование.* — 2017 — №1 (41) — С. 92— 101.

[24] *Новаковский Н.С.* Аналитическое и численное представление звуковых характеристик обобщенной центрированной волны // *Математические структуры и моделирование.* — 2017 — №2 (42) — С. 94— 104.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

[25] А.с. 2016613170 Российская федерация. Программа численного решения задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа / Новаковский Н.С. – № 2016610486; заявл. 25.01.2016; опубл. 18.03.2016.

[26] А.с. 2016619500 Российская федерация. Реализация конечно-разностного метода «Ромб» для численного решения одномерной системы уравнений газовой динамики/ Новаковский Н.С. – № 2016617038; заявл. 04.07.2016; опубл. 22.08.2016.

[27] А.с. 2017619668 Российская федерация. ROBOC–расчёт задачи сильного сжатия одномерных слоёв газа с учётом условий на характеристике/ Новаковский Н.С. – № 2017616584; заявл. 06.07.2016; опубл. 01.09.2017.

Публикации в других изданиях

[28] *Новаковский Н.С.* Об одном методе решения задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // *Эврика*, Вып. 2 (217) — Екатеринбург: УрГУПС, 2016 — С. 56-62.

[29] *Новаковский Н.С., Баутин С.П.* Численное решение задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа с учётом условий на характеристике // Материалы международной конференции «XIII ЗАБАБАХИНСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ».(20-24 марта 2017 г.), Снежинск: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ» им. Академика Е.И. Забабахина, С.44-45.

[30] *Новаковский Н.С., Баутин С.П.* Комбинированный метод расчета сильного сжатия одномерных слоев газа в конфигурации Р. Мизеса// Научная сессия НИЯУ МИФИ-2016. Заседания тематических секций по направлению «Инновационные ядерные технологии». Сб.тезисов.(12-13 декабря 2016 г. Снежинск.) М.: НИЯУ МИФИ; Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016, С. 88-89.

[31] *Новаковский Н.С.* Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоев газа в конфигурации Р. Мизеса// XVI всероссийская научно-практическая конференция «Дни науки - 2016». 100-летию со дня рождения Б.В. Броховича: Материалы конференции. (Озёрск, 20 -23 апреля 2016 г.) - Озёрск: ОТИ НИЯУ МИФИ, 2016 – С.115.

[32] *Новаковский Н.С.* Сильное сжатие одномерных слоёв газа// тезисы докл. всероссийской конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики памяти К.И. Бабенко». (Дюрсо 5-8 сентября 2016), М.: ИПМ им. Келдыша – С. 49-50.

[33] *Новаковский Н.С.* Численное решение задач без-ударного сильного сжатия одномерных слоёв газа с учётом условия на характеристике//Тезисы докл. всерос. конференции с междунар. участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва». (Новосибирск 4-8 сентября 2017), Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2017 – С. 39-40.

Подписано в печать 28.09.2017. Тираж 100 экз.
Объем 1,4 усл.-печ. л. Формат 60x84/16. Заказ 259.

УрГУПС
620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66.
Тел./факс (343)221-24-90
E-mail: rio@usurt.ru